

第一章 空间与形式

1 线性空间

1.1 抽象的线性空间

定义 1.1 设 $(V, +, \mathbf{0})$ 是交换群, $(F, +, 0, \cdot, 1)$ 域. 设数乘是映射:

$$\begin{aligned} \text{数乘: } F \times V &\longrightarrow V \\ (\alpha, \mathbf{v}) &\longmapsto \alpha\mathbf{v} \end{aligned}$$

满足以下规律

$$(i) \quad \forall \alpha, \beta \in F, \mathbf{v} \in V, (\alpha\beta)\mathbf{v} = \alpha(\beta\mathbf{v});$$

$$(ii) \quad \forall \mathbf{v} \in V, 1\mathbf{v} = \mathbf{v};$$

$$(iii) \quad \forall \alpha, \beta \in F, \mathbf{v} \in V, (\alpha + \beta)\mathbf{v} = \alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{v};$$

$$(iv) \quad \forall \alpha \in F, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V, \alpha(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \alpha\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v}.$$

我们称 $(V, +, \mathbf{0}, \text{数乘}, 1)$ 是域 F 上的线性空间或向量空间. 域 F 称为 V 的基域.

例 1.2 (坐标空间). 设 F 是域, F^n 是 n 维坐标空间. 具体实例 $\mathbb{R}^n, \mathbb{Q}^n, \mathbb{C}^n, \mathbb{Z}_p^n$, 其中 p 是素数. 值得注意的是 \mathbb{Z}_p^n 共有 p^n 个元素.

例 1.3 (矩阵空间). 设 F 是域, $F^{m \times n}$ 是 F 上 m 行 n 列的矩阵的集合. 关于矩阵的加法和数乘, $F^{m \times n}$ 是 F 上的线性空间.

例 1.4 (代数空间). 设 R 是环(不一定交换). 再设 $F \subset R$ 是 R 的子域. 则 R 是 F 上的线性空间. 验证如下: 首先, $(R, +, 0)$ 是交换群. 由 R 中的乘法结合律可知

$$\forall \alpha, \beta \in F, r \in R, (\alpha\beta)r = \alpha(\beta r).$$

因为 1 是 R 的也是 F 的乘法单位, 所以 $1r = r$. R 的分配律蕴含着空间的分配律. 验证完毕.

具体实例: \mathbb{C} 是 \mathbb{R} 上的线性空间, \mathbb{R} 是 \mathbb{Q} 上的线性空间, $F[x_1, \dots, x_n]$ 是域 F 上的线性空间. Hamilton 四元数环是 \mathbb{C} 上的线性空间. 设 K 是 F 的子域. 则 F 上的线性空间也是 K 上的线性空间.

例 1.5 (映射空间) 设 S 是非空集合, V 是域 F 上的线性空间. 令 $\text{Map}(S, V)$ 是从 S 到 V 的所有映射的集合. 对任意 $f, g \in \text{Map}(S, V)$, $\alpha \in F$ 定义:

$$\begin{array}{ccc} f + g : S \longrightarrow V & & \alpha f : S \longrightarrow V \\ x \mapsto f(x) + g(x) & \text{和} & x \mapsto \alpha f(x). \end{array}$$

令 $\tilde{\mathbf{0}} : S \longrightarrow V$ 是把 S 中的元素都映成 $\mathbf{0}$ 的映射. 则

$$(\text{Map}(S, V), +, \tilde{\mathbf{0}}, \text{数乘}, 1)$$

是线性空间. 实例 $\text{Map}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ 是线性空间.

命题 1.6 设 V 是域 F 上的线性空间. 设 $\lambda \in F, \mathbf{v} \in V$. 则

$$(i) \lambda \mathbf{0} = \mathbf{0};$$

$$(ii) \lambda \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ 当且仅当 } \lambda = 0 \text{ 或 } \mathbf{v} = \mathbf{0};$$

$$(iii) (-1)\mathbf{v} = -\mathbf{v}.$$

证明. (i) 直接计算得

$$\lambda \mathbf{0} = \lambda(\mathbf{0} + \mathbf{0}) = \lambda \mathbf{0} + \lambda \mathbf{0} \implies \lambda \mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

(ii) 设 $\lambda \mathbf{v} = \mathbf{0}$ 且 $\lambda \neq 0$. 则

$$\mathbf{v} = 1\mathbf{v} = (\lambda^{-1}\lambda)\mathbf{v} = \lambda^{-1}(\lambda\mathbf{v}) = \lambda^{-1}\mathbf{0} \stackrel{(i)}{=} \mathbf{0}.$$

当 $\lambda = 0$ 时, 反之, 由 (i) 只要证明 $0\mathbf{v} = \mathbf{0}$. 直接计算得

$$0\mathbf{v} = (0 + 0)\mathbf{v} = 0\mathbf{v} + 0\mathbf{v} \implies 0\mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

(iii) 直接计算得

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &\stackrel{(ii)}{=} 0\mathbf{v} = (1 + (-1))\mathbf{v} \\ &= 1\mathbf{v} + (-1)\mathbf{v} = \mathbf{v} + (-1)\mathbf{v} \\ &\implies (-1)\mathbf{v} = -\mathbf{v}. \quad \square \end{aligned}$$

例 1.7 证明: $(\mathbb{Z}, +, 0)$ 不可能是任何域 F 上的线性空间.

证明. 设结论不成立. 再设 0_F 和 1_F 分别是 F 中的加法和乘法单位. 先考虑 F 的特征不等于 2 的情形. 此时, $\lambda := 1_F + 1_F \neq 0_F$. 于是 λ^{-1} 存在. 通过直接计算得:

$$\begin{aligned} 2 &= 1 + 1 = (1_F 1 + 1_F 1) = (1_F + 1_F)1 = \lambda 1 \\ &\implies \lambda^{-1} 2 = 1 \\ &\implies \lambda^{-1}(1 + 1) = 1 \\ &\implies \lambda^{-1} 1 + \lambda^{-1} 1 = 1. \end{aligned}$$

矛盾, 因为两个相同整数之和不可能等于 1.

再设 F 的特征等于 2 的情形. 则

$$2 = 1 + 1 = (1_F 1 + 1_F 1) = (1_F + 1_F)1 = 0_F 1 = 0.$$

矛盾.

1.2 子空间

定义 1.8 设 V 是域 F 上的线性空间, W 是 V 的非空子集. 如果对于任意的 $\alpha, \beta \in F$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in W$, 我们有 $\alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y} \in W$, 则称 W 是 V 的子空间.

例 1.9 (i) 设 $\phi: F^n \rightarrow F^m$ 是线性映射. 则 $\ker(\phi)$ 是 F^n 的子空间, $\text{im}(\phi)$ 是 F^m 的子空间.

(ii) 设 $SM_n(F)$ 是 F 上所有 n 阶对称方阵的集合, $SSM_n(F)$ 是 F 上所有 n 阶斜对称方阵的集合. 则它们都是 $M_n(F)$ 上的子空间.

验证如下: 设 $A, B \in SM_n(F), \alpha, \beta \in F$. 我们有

$$(\alpha A + \beta B)^t = \alpha A^t + \beta B^t = \alpha A + \beta B \implies \alpha A + \beta B \in SM_n(F).$$

斜对称情形类似.

(iii) 设 $F[x]^{(d)} = \{p \in F[x] \mid \deg(p) < d\}$. 则 $F[x]^{(d)}$ 是 $F[x]$ 的子空间.

(iv) 闭区间 $[a, b]$ 上的连续函数的集合 $C[a, b]$ 和连续可微函数的集合 $C^1[a, b]$ 是 $\text{Map}([a, b], \mathbb{R})$ 的子空间.

线性空间 V 中的任意个子空间的交仍是子空间, 其证明与上学期第二章第一讲命题 1.19 类似. 设 V_1, \dots, V_k 是 V 的子空间, 定义

$$V_1 + V_2 + \dots + V_k = \{\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \dots + \mathbf{v}_k \mid \mathbf{v}_1 \in V_1, \mathbf{v}_2 \in V_2, \dots, \mathbf{v}_k \in V_k\}.$$

则 $V_1 + V_2 + \dots + V_k$ 是子空间. 称之为 V_1, \dots, V_k 的和. 验证见上学期第二章第一讲命题 1.20.

1.3 子空间的直和

定义 1.10 设 V 是线性空间, V_1, \dots, V_k 是 V 的子空间, 且 $W = V_1 + \dots + V_k$. 如果对于任意 $\mathbf{w} \in W$ 存在唯一的

$\mathbf{v}_1 \in V_1, \dots, \mathbf{v}_k \in V_k$ 使得

$$\mathbf{w} = \mathbf{v}_1 + \dots + \mathbf{v}_k.$$

则称 W 是 V_1, \dots, V_k 的直和, 并记为

$$W = V_1 \oplus \dots \oplus V_k.$$

定理 1.11 设 V 是线性空间, V_1, \dots, V_k 是 V 的子空间, 且 $W = V_1 + \dots + V_k$. 则以下结论等价.

(i) W 是 V_1, \dots, V_k 的直和;

(ii) 如果 $\mathbf{0} = \mathbf{v}_1 + \dots + \mathbf{v}_k$, $\mathbf{v}_1 \in V_1, \dots, \mathbf{v}_k \in V_k$, 则 $\mathbf{v}_1 = \dots = \mathbf{v}_k = \mathbf{0}$.

(iii) 对任意 $i \in \{1, 2, \dots, k\}$,

$$V_i \cap (V_1 + \dots + V_{i-1} + V_{i+1} + \dots + V_k) = \{\mathbf{0}\}.$$

证明. (i) \implies (ii). 显然.

(ii) \implies (iii). 不妨设 $i = 1$. 设 $\mathbf{w} \in V_1 \cap (V_2 + \dots + V_k)$. 则存在 $\mathbf{v}_2 \in V_2, \dots, \mathbf{v}_k \in V_k$ 使得 $\mathbf{w} = \mathbf{v}_2 + \dots + \mathbf{v}_k$. 于是

$$\mathbf{0} = -\mathbf{w} + \mathbf{v}_2 + \dots + \mathbf{v}_k.$$

由 $-\mathbf{w} \in V_1$ 和 (ii) 可知, $\mathbf{w} = \mathbf{0}$.

(iii) \implies (i). 设 $\mathbf{w} \in W$, 且

$$\mathbf{w} = \mathbf{u}_1 + \cdots + \mathbf{u}_k = \mathbf{v}_1 + \cdots + \mathbf{v}_k,$$

其中 $\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1 \in V_1, \dots, \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_k \in V_k$. 则 $\mathbf{0} = (\mathbf{u}_1 - \mathbf{v}_1) + \cdots + (\mathbf{u}_k - \mathbf{v}_k)$. 于是

$$(\mathbf{v}_1 - \mathbf{u}_1) = (\mathbf{u}_2 - \mathbf{v}_2) + \cdots + (\mathbf{u}_k - \mathbf{v}_k).$$

由此得出, $\mathbf{v}_1 - \mathbf{u}_1 \in V_1 \cap (V_2 + \cdots + V_k)$. 根据 (iii), $\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1$. 类似地可得 $\mathbf{v}_i = \mathbf{u}_i, i = 2, \dots, k$. \square

例 1.12 设 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ 是 \mathbb{R}^n 的一组基. 则

$$\mathbb{R}^n = \langle \mathbf{v}_1 \rangle \oplus \cdots \oplus \langle \mathbf{v}_n \rangle.$$

这是因为 \mathbb{R}^n 中的元素都是 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ 的线性组合而且 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ 线性无关.

例 1.13 设 F 是特征不等于 2 的域. 证明:

$$M_n(F) = SM_n(F) \oplus SSM_n(F).$$

证明. 设 $A \in M_n(F)$. 令

$$B = \frac{1}{2}(A + A^t) \quad \text{和} \quad C = \frac{1}{2}(A - A^t).$$

因为 $2 \neq 0$, 所以 B 和 C 是良定义的. 可直接验证

$$B \in SM_n(F), C \in SSM_n(F), \text{ 且 } A = B + C.$$

于是, $M_n(F) = SM_n(F) + SSM_n(F)$. 若 $A \in SM_n(F) \cap SSM_n(F)$, 则 $A = A^t = -A^t$. 于是, $2A^t = O$. 因为 2 可逆, 所以 $A = O$, 即这两个子空间交平凡. 由定理 1.11 (iii), $M_n(F) = SM_n(F) \oplus SSM_n(F)$. \square

当 F 的特征等于 2 时, $1 = -1$. 于是,

$$SM_n(F) = SSM_n(F).$$

故 $SM_n(F) \cap SSM_n(F) \neq \{O\}$. 这两个子空间之和不是直和.

例 1.14 设 V 是线性空间, V_1, \dots, V_k 是 V 的子空间. 如果 $V_1 + \dots + V_k$ 是直和, 则对任意的 $\ell \in \{1, 2, \dots, k\}$, $V_1 + \dots + V_\ell$ 也是直和.

证明. 设 $\mathbf{v}_1 \in V_1, \dots, \mathbf{v}_\ell \in V_\ell$ 使得 $\mathbf{v}_1 + \dots + \mathbf{v}_\ell = \mathbf{0}$. 则

$$\mathbf{v}_1 + \dots + \mathbf{v}_\ell + \underbrace{\mathbf{0} + \dots + \mathbf{0}}_{k-\ell} = \mathbf{0}.$$

将定理 1.11 (ii) 用于 $V_1, \dots, V_\ell, \dots, V_k$ 可知, $\mathbf{v}_1 = \dots = \mathbf{v}_\ell = \mathbf{0}$. 再将定理 1.11 (ii) 用于 V_1, \dots, V_ℓ 得到, $V_1 + \dots + V_\ell$ 也是直和. \square

例 1.15 设

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

则 $\langle \mathbf{v}_1 \rangle \cap \langle \mathbf{v}_2 \rangle = \{0\}$, $\langle \mathbf{v}_1 \rangle \cap \langle \mathbf{v}_3 \rangle = \{0\}$ 且 $\langle \mathbf{v}_3 \rangle \cap \langle \mathbf{v}_1 \rangle = \{0\}$. 但 $\langle \mathbf{v}_3 \rangle \cap (\langle \mathbf{v}_1 \rangle + \langle \mathbf{v}_2 \rangle) = \langle \mathbf{v}_3 \rangle$. 于是 $\langle \mathbf{v}_1 \rangle + \langle \mathbf{v}_2 \rangle + \langle \mathbf{v}_3 \rangle$ 不是直和.

例 1.16 设 $P^{(d)} := \{f \in F[x_1, \dots, x_n] \mid \deg(f) \leq d\} \cup \{0\}$ 和 $H_i = \{h \in F[x_1, \dots, x_n] \mid h \text{ 齐 } i \text{ 次}\}$. 根据第一讲 5.2 节,

$$P^{(d)} := \bigoplus_{i=0}^d H_i.$$

1.4 线性相关性

符号约定. 在本小节和以后的各小节中 V 是域 F 上的线性空间.

设 $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in F$ 和 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in V$. 则 $\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_k \mathbf{v}_k$ 称为 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ 在 F 上的一个线性组合. 如果存在不全为零的 $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ 使得上述线性组合等于 0 , 则称 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ 在 F 上线性相关. 否则, 称 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ 是在 F 上线性无关.

上学期讲的关于线性组合, 线性相关和无关的结论在抽象线性空间中都成立. 我们回忆线性组合引理(上学期第二章第一讲引理 1.12).

引理 1.17 设 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k; \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_\ell$ 是 V 中两组向量. 如果 $k > \ell$ 且 \mathbf{v}_i 是 $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_\ell$ 的线性组合, $i = 1, \dots, k$. 则 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ 线性相关.

该定理的另一个证明见席南华《基础代数》定理 1.18.

定义 1.18 设 S 是 V 的一个非空子集. 如果 S 中存在一个有限子集是线性相关的, 则称 S 是一个线性相关集. 否则, 称 S 是线性无关集.

例 1.19 令 $V = F[x]$. 则 $\{1, x, x^2, \dots\}$ 是一个线性无关集.

例 1.20 在 $\text{Map}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ 中, $\sin(x)^2, \cos(x)^2, 1$ 是线性相关的 ($\because \sin(x)^2 + \cos(x)^2 = 1$).

例 1.21 设 $e^{\alpha_1 x}, \dots, e^{\alpha_n x} \in \text{Map}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, 其中 $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ 两两不同. 证明: $e^{\alpha_1 x}, \dots, e^{\alpha_n x}$ 在 \mathbb{R} 上线性无关.

证明. 设 $\beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{R}$ 使得

$$\beta_1 e^{\alpha_1 x} + \dots + \beta_n e^{\alpha_n x} = 0.$$

对上式求 k 阶导数得

$$\beta_1 \alpha_1^k e^{\alpha_1 x} + \dots + \beta_n \alpha_n^k e^{\alpha_n x} = 0.$$

取 $k = 0, 1, \dots, n-1$, 我们有

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \cdots & \alpha_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_1^{n-1} & \alpha_2^{n-1} & \alpha_3^{n-1} & \cdots & \alpha_n^{n-1} \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} \beta_1 e^{\alpha_1 x} \\ \beta_2 e^{\alpha_2 x} \\ \vdots \\ \beta_n e^{\alpha_n x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

因为 $\det(A) \neq 0$, 所以 A 可逆. 故

$$\beta_1 e^{\alpha_1 x} = \beta_2 e^{\alpha_2 x} = \cdots = \beta_n e^{\alpha_n x} = 0 \implies \beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_n = 0.$$

故, $e^{\alpha_1 x}, \dots, e^{\alpha_n x}$ 在 \mathbb{R} 上线性无关. \square

例 1.22 设 $a = \sqrt{-1}$ 和 $b = \sqrt{-2}$. 则 a, b 在 \mathbb{R} 上线性相关. 这是因为 $\sqrt{2}a - b = 0$. 但它们在 \mathbb{Q} 上线性无关. 否则, 存在 $q \in \mathbb{Q}$ 使得 $b = qa$. 于是, $q = \sqrt{2}$. 矛盾.

例 1.23 设 $f, g \in C^1(a, b)$. 证明:

(i) 如果 f, g 在 \mathbb{R} 上线性相关, 则对任意 $x \in (a, b)$,

$$W_2 = \det \begin{pmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{pmatrix} = 0. \quad W_2 \text{ 称为二阶 Wronskian.}$$

(ii) 设 f 在 (a, b) 上恒正. 则 (i) 的逆命题成立.

证明. (i) 设 $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, 不全为零, 使得对任意 $x \in (a, b)$ 使得 $\lambda f(x) + \mu g(x) = 0$. 则 $\lambda f'(x) + \mu g'(x) = 0$. 于是

$$\begin{pmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

对任意 $x \in (a, b)$ 成立. 于是, $W_2 = 0$.

(ii) 注意到 f 在 (a, b) 上恒正蕴含 $1/f(x) \in C^1(a, b)$. 因为 W_2 在 (a, b) 上恒为零, 所以在 (a, b) 上

$$\left(\frac{g}{f}\right)' = 0.$$

故存在 $c \in \mathbb{R}$ 使得 $g/f = c$, 即 $g - cf = 0$ 在 (a, b) 上成立. 由此得出 f, g 在 \mathbb{R} 上线性相关. \square

1.5 子空间的生成元

设 S 是 V 的非空子集. 令 $\langle S \rangle$ 是 S 中的元素的所有在 F 上的线性组合的集合, 即

$$\langle S \rangle := \left\{ \sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbf{v}_i \mid k \in \mathbb{Z}^+, \alpha_i \in F, \mathbf{v}_i \in S \right\}.$$

可验证 $\langle S \rangle$ 是一个子空间(上学期第二章第二讲命题 1.26). 称 $\langle S \rangle$ 为由 S 生成的子空间, S 称为 $\langle S \rangle$ 的一组生成元.

设 U 是 V 的子空间. 如果存在有限集 $S \subset V$ 使得 $U = \langle S \rangle$, 则称 U 是在 F 上有限生成的子空间.

例 1.24 设 $V = F[x]$. 则 V 不是有限生成的.

证明. 假设 $F[x]$ 可以由 $p_1, \dots, p_\ell \in F[x]$ 生成. 则 $1, x, \dots, x^\ell$ 都是 p_1, \dots, p_ℓ 在 F 上的线性组合. 由引理 1.17 可知, $1, x, \dots, x^\ell$ 在 F 上线性相关. 矛盾.

2 线性映射

符号约定. 在本节中 V, W 是域 F 上的两个线性空间. 它们中的零向量分别记为 $\mathbf{0}_V$ 和 $\mathbf{0}_W$.

2.1 定义与例子

定义 2.1 设 $\phi : V \rightarrow W$. 如果对任意的 $\alpha, \beta \in F$, $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ 都有 $\phi(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) = \alpha\phi(\mathbf{u}) + \beta\phi(\mathbf{v})$, 则称 ϕ 是从 V 到 W 的线性映射.

上学期讲的关于线性映射的性质对抽象的线性映射仍成立. 特别地, 我们回忆一下核空间的性质.

命题 2.2 设 $\phi : V \rightarrow W$ 是线性映射. 则 ϕ 是单射当且仅当 $\ker(\phi) = \{\mathbf{0}_V\}$.

证明. 见上学期第二章第三讲命题 5.8. \square

例 2.3 以下线性映射是常用的.

$$\begin{array}{ll} \text{零映射: } V \rightarrow W & \text{恒同映射: } V \rightarrow V \\ \mathbf{v} \mapsto \mathbf{0}_W. & \mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}. \end{array}$$

设 V 是 W 的子空间.

$$\begin{array}{l} \text{嵌入映射: } V \rightarrow W \\ \mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}. \end{array}$$

设 ϕ 是从 V 到 W 的线性映射, U 是 V 的子空间. 则限制映射:

$$\begin{aligned}\phi_U \quad U &\longrightarrow W \\ \mathbf{u} &\longmapsto \phi(\mathbf{u})\end{aligned}$$

也是线性映射.

例 2.4 设 $V = F^n$ 和 $W = F^m$. 则 $\phi: V \longrightarrow W$ 是线性映射当且仅当存在 $A \in F^{m \times n}$ 使得

$$\phi(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}, \quad \text{其中 } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

例 2.5 设 $V = M_n(F)$ 和 $W = F$. 令

$$\begin{aligned}\text{tr}: M_n(F) &\longrightarrow F \\ A &\longmapsto \text{tr}(A)\end{aligned}$$

是线性映射. 验证如下. 设

$$\alpha, \beta \in F, \quad A = (a_{i,j})_{n \times n}, \quad B = (b_{i,j})_{n \times n},$$

其中 $a_{i,j}, b_{i,j} \in F$. 则 $\alpha A + \beta B = (\alpha a_{i,j} + \beta b_{i,j})$. 于是,

$$\begin{aligned}\text{tr}(\alpha A + \beta B) &= \sum_{i=1}^n (\alpha a_{i,i} + \beta b_{i,i}) \\ &= \alpha \sum_{i=1}^n a_{i,i} + \beta \sum_{i=1}^n b_{i,i} \\ &= \alpha \text{tr}(A) + \beta \text{tr}(B).\end{aligned}$$

于是, tr 是线性的. 但 $\det : M_n(F) \rightarrow F$ 不是线性的.

例 2.6 设 $V = F[x]$ 和 $h \in F[x] \setminus \{0\}$. 令

$$\begin{aligned}\phi_h : F[x] &\longrightarrow F[x] \\ f &\mapsto \text{rem}(f, h, x).\end{aligned}$$

是线性映射. 验证如下. 设 $\alpha, \beta \in F, f, g \in F[x]$. 由多项式除法可知, 存在 $p, q \in F[x]$ 使得

$$f = ph + \phi_h(f) \quad \text{和} \quad g = qh + \phi_h(g).$$

于是 $\alpha f + \beta g = (\alpha p + \beta q)h + \alpha\phi_h(f) + \beta\phi_h(g)$. 因为 $\deg(\phi_h(f)) < \deg(h)$ 和 $\deg(\phi_h(g)) < \deg(h)$, 所以 $\deg(\alpha\phi_h(f) + \beta\phi_h(g)) < \deg(h)$. 由余式的唯一性可知

$$\phi_h(\alpha f + \beta g) = \alpha\phi_h(f) + \beta\phi_h(g).$$

根据多项式的除法, 我们有

$$\ker(\phi_h) = \{f \in F[x] \mid h \mid f\} \quad \text{和} \quad \text{im}(\phi_h) = F[x]^{(\deg(h))}.$$

例 2.7 设 $F = \mathbb{R}, V = C^1[a, b]$ 和 $W = C[a, b]$. 则求导 d/dx 是从 V 到 W 的线性映射, 而变上限积分

$$\begin{aligned}\int_a^x : W &\longrightarrow V \\ f(t) &\mapsto \int_a^x f(t) dt\end{aligned}$$

是线性映射. 直接计算得

$$\ker\left(\frac{d}{dx}\right) = \mathbb{R}, \quad \text{im}\left(\frac{d}{dx}\right) = C[a, b]$$

和

$$\ker\left(\int_a^x\right) = \{0\}, \quad \text{im}\left(\int_a^x\right) = \{f \in C^1[a, b] \mid f(a) = 0\}.$$

2.2 线性映射的运算

令 $\text{Hom}(V, W)$ 是从 V 到 W 的所有线性映射的集合. 它是 $\text{Map}(V, W)$ 的子集. 可直接验证, 对任意的 $\alpha, \beta \in F$, $\phi, \psi \in \text{Hom}(V, W)$, 我们有 $\alpha\phi + \beta\psi \in \text{Hom}(V, W)$ (见上学期第二章第四讲命题 6.11). 于是, $\text{Hom}(V, W)$ 是 $\text{Map}(V, W)$ 的子空间, 故它也是 F 上的线性空间. 再设 U 是另一个 F 上的线性空间. 设 $\phi \in \text{Hom}(U, V)$ 和 $\psi \in \text{Hom}(V, W)$. 则 $\psi \circ \phi \in \text{Hom}(U, W)$. 具体验证见上学期第二章第四讲命题 6.15.

例 2.8 考虑例 2.7 中的两个映射. 我们有

$$\int_a^x \left(\frac{d}{dt}f(t)\right) dt = f(x) - f(a) \quad \text{和} \quad \frac{d}{dx} \left(\int_a^x f(t) dt\right) = f(x).$$

命题 2.9 设 $\phi \in \text{Hom}(V, W)$ 是双射. 则 $\phi^{-1} \in \text{Hom}(W, V)$.

证明. 设 $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in W$, $\mathbf{v}_1 = \phi^{-1}(\mathbf{w}_1)$ 和 $\mathbf{v}_2 = \phi^{-1}(\mathbf{w}_2)$. 对任意的 $\alpha_1, \alpha_2 \in F$,

$$\phi(\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2) = \alpha_1\phi(\mathbf{v}_1) + \alpha_2\phi(\mathbf{v}_2) = \alpha_1\mathbf{w}_1 + \alpha_2\mathbf{w}_2.$$

于是

$$\phi^{-1}(\alpha_1 \mathbf{w}_1 + \alpha_2 \mathbf{w}_2) = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 = \alpha_1 \phi^{-1}(\mathbf{w}_1) + \alpha_2 \phi^{-1}(\mathbf{w}_2). \quad \square$$

定义 2.10 如果存在双射 $\phi \in \text{Hom}(V, W)$, 则称 V 和 W 线性同构.

线性同构是等价关系, 其验证过程与验证群同构是等价关系类似(见上学期第四章第一讲第 15 页).

例 2.11 线性空间 $\text{Hom}(F^n, F^m)$ 与 $F^{m \times n}$ 线性同构. 设

$$\begin{aligned} \Phi : \text{Hom}(F^n, F^m) &\longrightarrow F^{m \times n} \\ \phi &\longmapsto A_\phi \quad (\phi \text{ 在标准基下的矩阵}) \end{aligned}$$

则 Φ 是双射. 具体验证见上学期第二章第四讲推论 6.14. 于是, Φ 是线性同构.

3 商空间与自然线性映射

在本节中 V 是域 F 上的线性空间.

3.1 商空间

设 U 是 V 的子空间. 我们在 V 上定义如下等价关系.

定义 3.1 设 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$. 如果 $\mathbf{x} - \mathbf{y} \in U$, 则称 \mathbf{x} 和 \mathbf{y} 关于 U 等价. 记为 $\mathbf{x} \sim_U \mathbf{y}$.

我们验证 \sim_U 是等价关系. 首先, $\mathbf{x} - \mathbf{x} = \mathbf{0} \in U$. 于是对任意的 $\mathbf{x} \in V$, $\mathbf{x} \sim_U \mathbf{x}$. 自反性成立. 设 $\mathbf{x} \sim_U \mathbf{y}$. 则 $\mathbf{x} - \mathbf{y} \in U$. 于是 $\mathbf{y} - \mathbf{x} \in U$. 从而 $\mathbf{y} \sim_U \mathbf{x}$. 对称性成立. 设 $\mathbf{x} \sim_U \mathbf{y}$, $\mathbf{y} \sim_U \mathbf{z}$. 则 $\mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{y} - \mathbf{z} \in U$. 于是

$$\mathbf{x} - \mathbf{y} + \mathbf{y} - \mathbf{z} = \mathbf{x} - \mathbf{z} \in U.$$

于是 $\mathbf{x} \sim_U \mathbf{z}$. 传递性成立.

引理 3.2 设 $\mathbf{x} \in V$ 且 $[\mathbf{x}]$ 是 \mathbf{x} 所在的等价类. 则

$$[\mathbf{x}] = \mathbf{x} + U.$$

证明. 设 $\mathbf{u} \in U$. 则 $\mathbf{x} \sim_U \mathbf{x} + \mathbf{u}$. 于是 $\mathbf{x} + \mathbf{u} \in [\mathbf{x}]$. 由此可知, $\mathbf{x} + U \subset [\mathbf{x}]$. 再设 $\mathbf{y} \in [\mathbf{x}]$. 则 $\mathbf{y} - \mathbf{x} \in U$, 即存在 $\mathbf{u} \in U$ 使得 $\mathbf{y} - \mathbf{x} = \mathbf{u}$, 即 $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{u}$, $\mathbf{y} \in \mathbf{x} + U$. 由此可知, $[\mathbf{x}] \subset \mathbf{x} + U$. \square

由上述引理可知

$$V / \sim_U = \{\mathbf{v} + U \mid \mathbf{v} \in V\}.$$

为了化简符号, 我们用 V/U 记 V / \sim_U . 与剩余环类似, V 上的加法和数乘可诱导出 V/U 中的线性运算.

设 $\mathbf{x} + U, \mathbf{y} + U \in V/U$ 和 $\alpha \in F$. 定义:

$$(\mathbf{x} + U) + (\mathbf{y} + U) = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + U \quad \text{和} \quad \alpha(\mathbf{x} + U) = (\alpha\mathbf{x}) + U.$$

下面我们来验证这两个运算的良好定义. 设 $\mathbf{x} + U = \mathbf{x}' + U$ 和 $\mathbf{y} + U = \mathbf{y}' + U$. 则 $\mathbf{x} - \mathbf{x}', \mathbf{y} - \mathbf{y}' \in U$. 于是

$$\begin{aligned}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') + (\mathbf{y} - \mathbf{y}') &= (\mathbf{x} + \mathbf{y}) - (\mathbf{x}' + \mathbf{y}') \in U \\ &\implies (\mathbf{x} + \mathbf{y}) \sim_U (\mathbf{x}' + \mathbf{y}') \\ &\implies (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + U = (\mathbf{x}' + \mathbf{y}') + U.\end{aligned}$$

类似地, 对 $\alpha \in F$,

$$\begin{aligned}\mathbf{x} - \mathbf{x}' \in U &\implies \alpha\mathbf{x} - \alpha\mathbf{x}' \in U \\ &\implies \alpha\mathbf{x} \sim_U \alpha\mathbf{x}' \\ &\implies (\alpha\mathbf{x}) + U = (\alpha\mathbf{x}') + U.\end{aligned}$$

由 V 中的运算规律可知, V/U 是域 F 上的线性空间, 其中的“零向量”是 $\mathbf{0} + U = U$. 我们称 V/U 是 V 关于 U 的商空间.

3.2 自然的线性映射

设 $\pi_U : V \longrightarrow V/U$ 是自然投射, 即对任意的 $\mathbf{x} \in V$, $\pi_U(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + U$ (见上学期第一章讲义三第 12 页). 下面我

们来验证 π_U 是线性的. 对任意 $\alpha, \beta \in F, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$,

$$\begin{aligned}
 \pi_U(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) &= (\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) + U && (\pi_U \text{ 的定义}) \\
 &= ((\alpha\mathbf{x}) + U) + ((\beta\mathbf{y}) + U) && (V/U \text{ 中加法的定义}) \\
 &= \alpha(\mathbf{x} + U) + \beta(\mathbf{y} + U) && (V/U \text{ 中数乘的定义}) \\
 &= \alpha\pi_U(\mathbf{x}) + \beta\pi_U(\mathbf{y}) && (\pi_U \text{ 的定义}).
 \end{aligned}$$

验证完毕.

设 $\phi: V \rightarrow W$ 是从 V 到 F 上的线性空间 W 的线性映射. 则对任意的 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$,

$$\phi(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{y}) \iff \phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \mathbf{0} \iff \mathbf{x} - \mathbf{y} \in \ker(\phi) \iff \mathbf{x} \sim_{\ker(\phi)} \mathbf{y}.$$

由上学期第一章讲义三第 12 页定理 3.1 可知存在唯一的单射 $\bar{\phi}: V/\ker(\phi) \rightarrow W$ 使得 $\phi = \bar{\phi} \circ \pi_{\ker(\phi)}$. 即下述图表交换.

$$\begin{array}{ccc}
 V & \xrightarrow{\phi} & W \\
 \downarrow \pi_{\ker(\phi)} & \nearrow \bar{\phi} & \\
 V/\ker(\phi) & &
 \end{array}$$

交换. 特别有 $\text{im}(\phi) = \text{im}(\bar{\phi})$. 设 $\mathbf{x} + \ker(\phi) \in V/\ker(\phi)$. 则

$$\phi(\mathbf{x}) = \bar{\phi} \circ \pi_{\ker(\phi)}(\mathbf{x}) = \bar{\phi}(\mathbf{x} + \ker(\phi)).$$

于是

$$\begin{aligned}
 \bar{\phi}: V/\ker(\phi) &\longrightarrow W \\
 \mathbf{x} + \ker(\phi) &\longmapsto \phi(\mathbf{x}).
 \end{aligned}$$

定理 3.3 (线性映射基本定理 I) 设 $\phi : V \rightarrow W$ 是从 V 到 F 上的线性空间 W 的映射. 则存在唯一的线性单射 $\bar{\phi}$ 使得 $\phi = \bar{\phi} \circ \pi_{\ker(\phi)}$. 特别地, $V/\ker(\phi)$ 与 $\text{im}(\phi)$ 线性同构.

证明. 根据上文, 我们只需验证 $\bar{\phi}$ 是线性的.

令 $U = \ker(\phi)$. 设 $\alpha, \beta \in F, \mathbf{x} + U, \mathbf{y} + U \in V/U$. 则

$$\begin{aligned} \bar{\phi}(\alpha(\mathbf{x} + U) + \beta(\mathbf{y} + U)) &= \bar{\phi}((\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) + U) && (V/U \text{ 中的运算}) \\ &= \phi(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) && (\bar{\phi} \text{ 的定义}) \\ &= \alpha\phi(\mathbf{x}) + \beta\phi(\mathbf{y}) && (\phi \text{ 线性}) \\ &= \alpha\bar{\phi}(\mathbf{x} + U) + \beta\bar{\phi}(\mathbf{y} + U) && (\bar{\phi} \text{ 的定义}). \end{aligned}$$

验证完毕. 因为 $\text{im}(\bar{\phi}) = \text{im}(\phi)$ 且 $\bar{\phi}$ 是单射, 所以把 $\bar{\phi}$ 看成从 $V/\ker(\phi)$ 到 $\text{im}(\phi)$ 的映射是线性同构. \square