第三章　行列式

下面考虑一般情形. 由行列式的多重线性和断言 2 可知

$$\det(A)=\sum_{j=1}^{n}\det\begin{pmatrix}\vec{A}_1\\ \vdots\\ \vec{A}_{i-1}\\ 0\cdots 0,a_{i,j},0,\cdots 0\\ \vec{A}_{i+1}\\ \vdots\\ \vec{A}_n\end{pmatrix}=\sum_{j=1}^{n}a_{i,j}A_{i,j}.$$

我们证明了按行展开的公式. 按列展开的公式可以类似证明，或通过行列式的转置公式和行展开公式证明. □

例 3.1 展开行列式

$$D=\begin{vmatrix}5&3&-1&2&0\\1&7&2&5&2\\0&-2&3&1&0\\0&-4&-1&4&0\\0&2&3&5&0\end{vmatrix}.$$

解. 利用上述定理证明中的断言 *2*, 我们有

$$D=-2\begin{vmatrix}5 & 3 & -1 & 2\\ 0 & -2 & 3 & 1\\ 0 & -4 & -1 & 4\\ 0 & 2 & 3 & 5\end{vmatrix}=-10\begin{vmatrix}-2 & 3 & 1\\ -4 & -1 & 4\\ 2 & 3 & 5\end{vmatrix}.$$

再利用第二类初等行变换得

$$D=-10\begin{vmatrix}-2 & 3 & 1\\ 0 & -7 & 2\\ 0 & 6 & 6\end{vmatrix}=20\times 6\times(-7-2)=-1080.$$

例 3.2 *Vandermonde* 行列式. 设 $(\alpha_1,\beta_1),\ldots,(\alpha_n,\beta_n)\in\mathbb{R}^{1\times 2}$. 求次数为 $n-1$ 次实系数多项式

$$f(x)=a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$$

使得

$$f(\alpha_i)=\beta_i,\quad i=1,2,\ldots,n.$$

即

$$a_0+a_1\alpha_i+\cdots+a_{n-2}\alpha_i^{n-2}+a_{n-1}\alpha_i^{n-1}=\beta_i,\quad i=1,2,\ldots,n,$$

其中 $a_0,a_1,\ldots,a_{n-2},a_{n-1}$ 是 n 个未知数. 利用矩阵表示,

我们有

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_1^{n-2} & \alpha_1^{n-1} \\ 1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_2^{n-2} & \alpha_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \alpha_{n-1} & \cdots & \alpha_{n-1}^{n-2} & \alpha_{n-1}^{n-1} \\ 1 & \alpha_n & \cdots & \alpha_n^{n-2} & \alpha_n^{n-1} \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \\ \beta_n \end{pmatrix}.$$

记 $V_n(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \det(A)$. 称之为关于 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ 的 Vandermonde 行列式. 该行列式也简记为 V_n.

展开 V_n 有多种方法. 我们这里采用初等变换和数学归纳法. 当 $n = 2$ 时,

$$V_2 = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 \\ 1 & \alpha_2 \end{vmatrix} = \alpha_2 - \alpha_1.$$

$$\begin{aligned} V_3 &= \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 \\ 1 & \alpha_3 & \alpha_3^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 \\ 0 & \alpha_2 - \alpha_1 & \alpha_2^2 - \alpha_1^2 \\ 0 & \alpha_3 - \alpha_1 & \alpha_3^2 - \alpha_1^2 \end{vmatrix} \\ &= (\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_1) \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 \\ 0 & 1 & \alpha_2 + \alpha_1 \\ 0 & 1 & \alpha_3 + \alpha_1 \end{vmatrix} = (\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_2). \end{aligned}$$

猜测: $V_n = \prod_{1 \le i < j \le n} (\alpha_j - \alpha_i)$. 设 $n > 3$ 且阶数小于 n 时

猜测成立. 当 n 时,

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_1^{n-2} & \alpha_1^{n-2}(\alpha_1-\alpha_n) \\ 1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_2^{n-2} & \alpha_2^{n-2}(\alpha_2-\alpha_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \alpha_{n-1} & \cdots & \alpha_{n-1}^{n-2} & \alpha_{n-1}^{n-2}(\alpha_{n-1}-\alpha_n) \\ 1 & \alpha_n & \cdots & \alpha_n^{n-2} & 0 \end{vmatrix} \quad (\ AF_{n-1,n}(-\alpha_n)\ )$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_1^{n-3}(\alpha_1-\alpha_n) & \alpha_1^{n-2}(\alpha_1-\alpha_n) \\ 1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_2^{n-3}(\alpha_2-\alpha_n) & \alpha_2^{n-2}(\alpha_2-\alpha_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \alpha_{n-1} & \cdots & \alpha_{n-1}^{n-3}(\alpha_{n-1}-\alpha_n) & \alpha_{n-1}^{n-2}(\alpha_{n-1}-\alpha_n) \\ 1 & \alpha_n & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$(\ AF_{n-1,n}(-\alpha_n)F_{n-2,n-1}(-\alpha_n)\ )$$

$$= \cdots$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1-\alpha_n & \cdots & \alpha_1^{n-3}(\alpha_1-\alpha_n) & \alpha_1^{n-2}(\alpha_1-\alpha_n) \\ 1 & \alpha_2-\alpha_n & \cdots & \alpha_2^{n-3}(\alpha_2-\alpha_n) & \alpha_2^{n-2}(\alpha_2-\alpha_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \alpha_{n-1}-\alpha_n & \cdots & \alpha_{n-1}^{n-3}(\alpha_{n-1}-\alpha_n) & \alpha_{n-1}^{n-2}(\alpha_{n-1}-\alpha_n) \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$(\ AF_{n-1,n}(-\alpha_n)F_{n-2,n-1}(-\alpha_n)\cdots F_{1,2}(-\alpha_n)\ )$$

$$= (-1)^{n+1}\prod_{i=1}^{n-1}(\alpha_i-\alpha_n)V(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1})$$

$$= \prod_{i=1}^{n-1}(\alpha_n-\alpha_i)V(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1})$$

$$= \prod_{i=1}^{n-1}(\alpha_n-\alpha_i)\prod_{1\le i<j\le n-1}(\alpha_j-\alpha_i)$$

$$= \prod_{1\le i<j\le n}(\alpha_j-\alpha_i).$$

猜测成立. 由此可知, A 满秩当且仅当 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ 两两不同. 此时, 所求多项式存在且唯一.

例 3.3 计算

$$D_n = \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

解. 直接计算得 $D_1 = 2$, $D_2 = 3$,

$$D_3 = \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & -3 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 4.$$

猜测: $D_n = n + 1$.

设 $n > 3$ 且当阶数小于 n 时猜测成立. 按第一列展开

得

$$
D_n = 2D_{n-1} - \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{pmatrix}
$$

$$
= 2D_{n-1} - D_{n-2} = 2n - (n-1) = n+1.
$$

猜测成立.

3.2 分块矩阵的行列式

定理 3.4 设 $A \in \mathrm{M}_m(\mathbb{R})$, $B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ 和 $C \in \mathbb{R}^{m\times n}$. 则

$$
\det\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix} = \det(A)\det(B).
$$

证明. (矩阵版) 对 m 归纳. 当 $m=1$ 时, 按第一列展开得

$$
\det\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a & c_1, \dots, c_n \\ O & B \end{pmatrix} = a\det(B).
$$

结论成立. 设 $m>1$ 且 A 是 $m-1$ 阶方阵时结论成立. 设

$A = (a_{i,j})_{m\times m}$. 则

$$
\begin{aligned}
\det\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \begin{matrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,m} \end{matrix} & C \\ O & B \end{pmatrix} \\
&= a_{1,1}A_{1,1}\det(B) + a_{2,1}A_{2,1}\det(B) + \cdots + a_{m,1}A_{m,1}\det(B) \\
&\quad (\text{按第一列展开并利用归纳假设, 其中 } A_{i,j} \text{ 代表 } A \text{ 的代数余子式}) \\
&= (a_{1,1}A_{1,1} + a_{2,1}A_{2,1} + \cdots + a_{m,1}A_{m,1})\det(B) \\
&= \det(A)\det(B). \quad \square
\end{aligned}
$$

(映射版) 把行列式

$$\det\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}$$

看成关于 A 的列的 m 重线性斜对称函数. 即定义:

$$
\begin{aligned}
f: \quad \underbrace{\mathbb{R}^m \times \cdots \times \mathbb{R}^m}_{m} &\longrightarrow \qquad \mathbb{R} \\
\left(\vec{A}^{(1)}, \ldots, \vec{A}^{(m)}\right) &\mapsto \det\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}
\end{aligned}.
$$

由第三章第一讲等式 (4) 可知, $f(\vec{A}^{(1)}, \ldots, \vec{A}^{(m)}) = w\det(A)$, 其中 $w = f(\vec{E}_m^{(1)}, \ldots, \vec{E}_m^{(m)})$. 由 f 的定义可知和按第一列

展开(m 次), 我们得到

$$w = f(\vec{E}_m^{(1)}, \dots, \vec{E}_m^{(m)}) = \det \begin{pmatrix} E_m & C \\ O & B \end{pmatrix} = \det(B).$$

故

$$f(\vec{A}^{(1)}, \dots, \vec{A}^{(m)}) = \det(A)\det(B) = \det \begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}. \quad \square$$

例 3.5 计算

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{vmatrix}.$$

解.

$$D = -\begin{vmatrix} 9 & 10 & 11 & 12 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 9 & 10 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 7 & 8 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -36.$$

推论 3.6 设 $A \in \mathrm{M}_m(\mathbb{R})$, $B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ 和 $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$. 则

$$\det \begin{pmatrix} C & A \\ B & O \end{pmatrix} = (-1)^{mn} \det(A)\det(B).$$

证明. 把子矩阵

$$\begin{pmatrix} A \\ O \end{pmatrix}$$

中的第一列逐个与前 n 列对调, 然后把第二列与它前面的 n 列逐个对调, ... 经过 mn 次列对调后, 我们得到矩阵

$$\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}.$$

于是

$$\det \begin{pmatrix} C & A \\ B & O \end{pmatrix} = (-1)^{mn} \det \begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix} = (-1)^{mn} \det(A)\det(B),$$

其中最后一个等式来自定理 3.4. □

3.3 乘法定理

定理 3.7 设 $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. 则

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

证明. (矩阵法) 如果 A 或 B 不满秩, 则 AB 也不满秩(第二章第四讲定理 6.25 (i)). 故 $\det(AB) = 0$ (第三章第一讲定理 2.14). 同理 $\det(A)\det(B) = 0$. 故定理成立.

断言. 设 $C, M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ 且 C 是初等矩阵. 则

$$\det(CM) = \det(C)\det(M) = \det(MC).$$

断言的证明. 设 $C=F_{i,j}$. 如果 $i=j$, 则 $C=E$. 断言显然成立. 如果 $i\neq j$. 则 $\det(CM)=\det(MC)=-\det(M)$. 而 $\det(C)\det(M)=-\det(M)$. 断言也成立.

设 $C = F_{i,j}(\alpha)$, $i \neq j$. 则 $\det(CM)$, $\det(MC)$ 和 $\det(C)\det(M)$ 都等于 $\det(M)$. 故断言成立.

设 $C=F_i(\lambda)$. 则 $\det(CM)$, $\det(MC)$ 和 $\det(C)\det(M)$ 都等于 $\lambda\det(M)$. 断言成立.

设矩阵 A 满秩. 则存在初等矩阵 $C_1, C_2, \ldots C_p$ 使得

$$A = C_1 C_2 \cdots C_p$$

(第二章第五讲定理 7.14 和第六讲推论 8.6). 由断言可知,

$$\det(A)=\det(C_1)\det(C_2\cdots C_p)=\det(C_1)\det(C_2)\cdots\det(C_p). \tag{1}$$

类似地

$$\begin{aligned}
\det(AB) &= \det(C_1(C_2\cdots C_pB)) \\
&= \det(C_1)\det(C_2\cdots C_pB) \quad (\text{断言}) \\
&= \det(C_1)\det(C_2)\cdots\det(C_p)\det(B) \\
&= \det(A)\det(B) \quad ((1)).
\end{aligned}$$

定理成立.

(映射法) 定义:

$$\begin{array}{rccc} f: & \underbrace{\mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n}_{n} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \left(\vec{B}^{(1)}, \ldots, \vec{B}^{(n)}\right) & \mapsto & \det(A\vec{B}^{(1)}, \ldots, A\vec{B}^{(n)}) = \det(AB) \end{array}.$$

由行列式的多重线性和矩阵乘法的分配律可直接验证 f 是多重线性的. 再根据行列式的斜对称性可知 f 也是斜对称的. 由第三章第一讲等式 (4) 可知,

$$f(\vec{B}^{(1)}, \ldots, \vec{B}^{(n)}) = w \det(B),$$

其中 $w = f(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$. 故

$$w = \det(AE_n) = \det(A).$$

于是, $\det(AB) = \det(A)\det(B)$. $\square$

注解 3.8 由上述定理可知,

$$\det(BA) = \det(B)\det(A) = \det(AB).$$

故 $\det(AB) = \det(BA)$. 即行列式是关于方阵乘法的交换不变量.

例 3.9 展开

$$D = \begin{vmatrix} 1 & \cos(\theta_1) & \cos(2\theta_1) \\ 1 & \cos(\theta_2) & \cos(2\theta_2) \\ 1 & \cos(\theta_3) & \cos(2\theta_3) \end{vmatrix}.$$

解. 由行列式乘积定理, 我们有

$$D = \begin{vmatrix} 1 & \cos(\theta_1) & 2\cos(\theta_1)^2 - 1 \\ 1 & \cos(\theta_2) & 2\cos(\theta_2)^2 - 1 \\ 1 & \cos(\theta_3) & 2\cos(\theta_3)^2 - 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \cos(\theta_1) & \cos(\theta_1)^2 \\ 1 & \cos(\theta_2) & \cos(\theta_2)^2 \\ 1 & \cos(\theta_3) & \cos(\theta_3)^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}.$$

故 $D = 2(\cos(\theta_3)-\cos(\theta_1))(\cos(\theta_3)-\cos(\theta_2))(\cos(\theta_2)-\cos(\theta_1))$.

例 3.10 设 $A = ((\alpha_i + \beta_j)^{n-1})_{n\times n}$. 展开 $\det(A)$.

解. 注意到

$$\begin{aligned}(\alpha_i + \beta_j)^{n-1} &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \alpha_i^k \beta_j^{n-1-k} \\ &= (\binom{n-1}{0}\alpha_i^0, \binom{n-1}{1}\alpha_i, \ldots, \binom{n-1}{n-1}\alpha_i^{n-1}) \begin{pmatrix} \beta_j^{n-1} \\ \beta_j^{n-2} \\ \vdots \\ \beta_j^0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

故

$$A = \begin{pmatrix} \binom{n-1}{0} & \binom{n-1}{1}\alpha_1 & \cdots & \binom{n-1}{n-1}\alpha_1^{n-1} \\ \binom{n-1}{0} & \binom{n-1}{1}\alpha_2 & \cdots & \binom{n-1}{n-1}\alpha_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \binom{n-1}{0} & \binom{n-1}{1}\alpha_n & \cdots & \binom{n-1}{n-1}\alpha_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1^{(n-1)} & \beta_2^{n-1} & \cdots & \beta_n^{n-1} \\ \beta_1^{(n-2)} & \beta_2^{n-2} & \cdots & \beta_n^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

由行列式的基本性质和乘积定理可知,

$$\det(A) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \prod_{1\le i<j\le n} (\alpha_j - \alpha_i)(\beta_j - \beta_i).$$

3.4 伴随矩阵

设 $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Kronecker 符号

$$\delta_{i,j} := \begin{cases} 0 & \text{如果 } i \neq j, \\ 1 & \text{如果 } i = j \end{cases}.$$

利用 Kronecker 符号, 单位矩阵可以表示为 $(\delta_{i,j})_{n\times n}$.

引理 3.11 设 $A = (a_{i,j}) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. 则

$$\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}A_{j,k} = \delta_{i,j}|A| \quad \text{和} \quad \sum_{k=1}^{n} a_{k,j}A_{k,i} = \delta_{i,j}|A|,$$

其中 $A_{i,j}$ 代表 A 关于第 i 行第 j 列的代数余子式, $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

证明. 当 $i = j$ 时, 结论由第三章第一讲定理 3.3 直接得出. 设 $i \neq j$. 令 B 是把 A 中第 j 行换成 $\vec{A}_i$ 后得到的矩阵. 因为 B 中由两行相同, 所以 $\det(B) = 0$. 把 B 按第 j 列展开, 再用第三章第一讲定理 3.3 得出

$$\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}A_{j,k} = \det(B) = 0.$$

另一个等式可通过对列进行类似操作得出. □

定义 3.12 设 $A=(a_{i,j})\in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. 矩阵

$$\begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{2,1} & \cdots & A_{n,1} \\ A_{1,2} & A_{2,2} & \cdots & A_{n,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1,n} & A_{2,n} & \cdots & A_{n,n} \end{pmatrix}$$

称为 A 的伴随矩阵. 记为 $A^\vee$.

引理 3.13 利用上述符号, 我们有

$$A^\vee A = AA^\vee = |A|E.$$

证明. 设 $A^\vee=(b_{i,j})_{n\times n}$. 则 $A^\vee A$ 中位于第 i 行第 j 列处的元素是

$$\sum_{k=1}^n b_{i,k}a_{k,j}=\sum_{k=1}^n A_{k,i}a_{k,j}=\delta_{i,j}|A| \quad (\because \text{引理 } 3.11).$$

故 $A^\vee A=|A|E_n$. 类似地, $AA^\vee$ 中位于第 i 行第 j 列处的元素是

$$\sum_{k=1}^n a_{i,k}b_{k,j}=\sum_{k=1}^n a_{i,k}A_{j,k}=\delta_{i,j}|A| \quad (\because \text{引理 } 3.11).$$

故 $AA^\vee=|A|E_n$. $\square$.

定理 3.14 设 $A\in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ 可逆. 则

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^\vee.$$

证明. 根据引理 3.13, 我们有

$$\left(\frac{1}{|A|}A^{\vee}\right)A=\frac{1}{|A|}(A^{\vee}A)=\frac{1}{|A|}|A|E=E.$$

由第二章第五讲推论 7.16, 定理成立. □

注解 3.15 设 A 可逆. 则

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{A_{1,1}}{|A|} & \frac{A_{2,1}}{|A|} & \cdots & \frac{A_{n,1}}{|A|} \\ \frac{A_{1,2}}{|A|} & \frac{A_{2,2}}{|A|} & \cdots & \frac{A_{n,2}}{|A|} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{A_{1,n}}{|A|} & \frac{A_{2,n}}{|A|} & \cdots & \frac{A_{n,n}}{|A|} \end{pmatrix}.$$

该公式说明当 A 中的元素都是整数时, A^{-1} 中的元素都是以 $|A|$ 为公分母的有理数.

4 行列式的应用

4.1 Cramer 法则

定理 4.1 设 $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ 和 $\mathbf{b}=(b_1,\ldots,b_n)^t \in \mathbb{R}^n$. 再设 $\mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_n)^t$ 是未知数向量. 则方程组 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 确定当且仅当 A 可逆. 此时, 该方程组的唯一解是

$$x_i=\frac{\det(\vec{A}^{(1)},\ldots,\vec{A}^{(i-1)},\mathbf{b},\vec{A}^{(i+1)},\ldots,\vec{A}^{(n)})}{\det(A)},$$

$i=1,2,\ldots,n$.

证明. 定理中的必要充分条件是第二章第三讲推论 4.3 和第五讲的定理 7.14 的直接推论. 再设 A 可逆. 则 $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$. 根据定理 3.14 和注释 3.15,

$$x_i = \frac{1}{|A|}(A_{1,i}, \ldots, A_{n,i})\mathbf{b}, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

其中 $A_{k,i}$ 是矩阵 A 关于第 k 行和第 i 列的代数余子式. 而

$$(A_{1,i}, \ldots, A_{n,i})\mathbf{b} = \sum_{k=1}^{n} b_k A_{k,i}.$$

它是行列式 $\det(\vec{A}^{(1)}, \ldots, \vec{A}^{(i-1)}, \mathbf{b}, \vec{A}^{(i+1)}, \ldots, \vec{A}^{(n)})$ 按第 i 列展开的表达式(第三章第一讲定理 3.3). □

注解 4.2 利用上述定理中的符号，令

$$A_i = \det(\vec{A}^{(1)}, \ldots, \vec{A}^{(i-1)}, \mathbf{b}, \vec{A}^{(i+1)}, \ldots, \vec{A}^{(n)}).$$

则当 A 可逆时, 方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的唯一解是

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}, \quad \ldots, \quad x_n = \frac{\det(A_n)}{\det(A)}.$$

该公式说明当 A 中的元素和 $\mathbf{b}$ 中的坐标都是整数时, 方程组的解是以 $\det(A)$ 为公分母的有理数.

4.2 子式和矩阵的秩

定义 4.3 设 $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, m\}$ 不必两两不同, $j_1, \ldots, j_k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ 也不必两两不同. 则

行列式

$$\det\begin{pmatrix} a_{i_1,j_1} & a_{i_1,j_2} & \cdots & a_{i_1,j_k} \\ a_{i_2,j_1} & a_{i_2,j_2} & \cdots & a_{i_2,j_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_k,j_1} & a_{i_k,j_2} & \cdots & a_{i_k,j_k} \end{pmatrix}$$

称为 A 的一个 k 阶子式(minor). 记为

$$M_A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix}.$$

例 4.4 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}.$$

则

$$M_A\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad M_A\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

显然, 如果 $i_1, \ldots, i_k$ 中有两个相同或 $j_1, \ldots, j_k$ 中有两个相同, 则对应的子式等于零.

定理 4.5 设 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 非零. 则下列命题等价.

(i) $\operatorname{rank}(A) = r$;

(ii) A 中所有大于 r 阶的子式都等于零且存在一个 r 阶子式非零;

(iii) A 中所有 $r+1$ 阶的子式都等于零且存在一个 r 阶子式非零.

证明. (i) $\Longrightarrow$ (ii) 假设

$$M_A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix} \neq 0$$

且 $k > r$. 不妨设 $i_1 < \ldots < i_k$ 和 $j_1 < \ldots < j_k$. 再设

$$B = (\vec{A}^{(j_1)}, \ldots, \vec{A}^{(j_k)}).$$

则

$$M_B\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ 1 & 2 & \cdots & k \end{pmatrix} = M_A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix} \neq 0.$$

故 B 中由第 $i_1, \ldots, i_k$ 行组成的矩阵满秩(第三章第一讲定理 2.14). 于是, B 中 $i_1, \ldots, i_k$ 行线性无关. 我们得到 $\operatorname{rank}(B) = k$. 故 B 的 k 个列向量 $\vec{A}^{(j_1)}, \ldots, \vec{A}^{(j_k)}$ 线性无关. 从而得到 $\operatorname{rank}(A) \geq k > r$. 矛盾. 于是, A 中所有大于 r 阶的子式都等于零.

设 A 中第 $\ell_1, \ldots, \ell_r$ 列线性无关. 设 C 是由这些列组成的子矩阵. 则 $\operatorname{rank}(C) = r$. 由矩阵秩定理(第二章第二

讲定理 3.6), 存在 C 中线性无关的 r 行. 设为 $k_1, \ldots, k_r$ 行. 根据第三章第一讲定理 2.14,

$$M_C\begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \cdots & k_r \\ 1 & 2 & \cdots & r \end{pmatrix} \neq 0 \Longrightarrow M_A\begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \cdots & k_r \\ \ell_1 & \ell_2 & \cdots & \ell_r \end{pmatrix} \neq 0.$$

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) 显然.

(iii) $\Longrightarrow$ (i) 假设 $\mathrm{rank}(A) > r$. 则 A 中存在 $r+1$ 列线性无关. 设这些列是 $\vec{A}^{(j_1)}, \ldots, \vec{A}^{(j_r)}, \vec{A}^{(j_{r+1})}$ 且这些列组成的子矩阵是 P. 则 $\mathrm{rank}(P) = r+1$. 由矩阵秩定理(第二章第二讲定理 3.6) 可知, P 中有 $r+1$ 行线性无关, 设这些行是 $\vec{P}_{i_1}, \ldots, \vec{P}_{i_r}, \vec{P}_{i_{r+1}}$. 则

$$M_P\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_r & i_{r+1} \\ 1 & \cdots & r & r+1 \end{pmatrix} \neq 0 \Longrightarrow M_A\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_r & i_{r+1} \\ j_1 & \cdots & j_r & j_{r+1} \end{pmatrix} \neq 0.$$

矛盾. 故 $\mathrm{rank}(A) \leq r$. 如果 $\mathrm{rank}(A) < r$, 则由 "(i) $\Longrightarrow$ (ii) " 可知, A 的所有 r 阶子式都等于零. 矛盾. 于是 $\mathrm{rank}(A) = r$. □

例 4.6 设 $A \in \mathbb{R}^{(n-1)\times n}$ 和 $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^t$ 是未知数向量. 如果 $\mathrm{rank}(A) = n-1$, 则

$$\mathrm{sol}(A\mathbf{x} = \mathbf{0}) = \langle \begin{pmatrix} |A_1| \\ -|A_2| \\ \vdots \\ (-1)^{n-1}|A_n| \end{pmatrix} \rangle,$$

其中 A_i 是 A 去掉第 i 列得到的 $(n-1)$ 阶方阵.

证明. 设

$$B_i = \begin{pmatrix} \vec{A}_i \\ \vec{A}_1 \\ \vdots \\ \vec{A}_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}), \quad i = 1, 2, \ldots, n-1.$$

则 $\det(B_i) = 0$ *(第三章第一讲行列式的性质 (S1))*. 对 B_i 按第一行展开得

$$a_{i,1}|A_1| - a_{i,2}|A_2| + \cdots + (-1)^{(n-1)} a_{i,n}|A_n| = 0, \; i = 1, 2, \ldots, n-1.$$

故 $(|A_1|, -|A_2|, \ldots, (-1)^{n-1}|A_n|)^t$ 是 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的一个解. 因为 $\mathrm{rank}(A) = n-1$, 所以

$$\dim(\mathrm{sol}(A\mathbf{x} = \mathbf{0})) = 1.$$

于是, 我们只要证明 $(|A_1|, -|A_2|, \ldots, (-1)^{n-1}|A_n|)^t$ 非零即可. 根据定理 *4.5*, $|A_1|, \ldots, |A_n|$ 至少有一个非零.

注解 4.7 定理 *4.5* 给出了一种通过行列式计算矩阵秩的方法. 该方法虽然效率较低, 但不需要计算非零实数的逆。这对于把秩推广到交换环上的矩阵有一定帮助.