

应用打洞引理时, 下列公式是有用的. 其证明是上一讲引理 10.1 的简单应用.

$$\begin{pmatrix} E_r & O_{r \times p} \\ O_{q \times r} & O_{q \times p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_r \\ O_{q \times r} \end{pmatrix} (E_r, O_{r \times p}). \quad (1)$$

**例 10.6** (矩阵乘法分解) 设  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  且  $\text{rank}(A) = r > 0$ . 则

$$A = BC$$

其中  $B \in \mathbb{R}^{m \times r}$  和  $C \in \mathbb{R}^{r \times n}$ .

证明. 根据打洞引理和 (1), 存在  $m$  阶可逆矩阵  $P$  和  $n$  阶可逆矩阵  $Q$  使得

$$PAQ = \begin{pmatrix} E_r & O_{r \times (n-r)} \\ O_{(m-r) \times r} & O_{(m-r) \times (n-r)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_r \\ O_{(m-r) \times r} \end{pmatrix} (E_r, O_{r \times (n-r)}).$$

于是,

$$A = \underbrace{P^{-1} \begin{pmatrix} E_r \\ O_{(m-r) \times r} \end{pmatrix}}_B \underbrace{(E_r, O_{r \times (n-r)}) Q^{-1}}_C.$$

## 10.2 矩阵秩的 (不) 等式

**引理 10.7** 设矩阵  $M$  具有以下四种分块形式之一

$$\begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} C & A \\ B & O \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} O & A \\ B & C \end{pmatrix}.$$

则  $\text{rank}(M) \geq \text{rank}(A) + \text{rank}(B)$  且当  $C = O$  时等号成立.

证明. 这四种形式可以通过第一类初等变换和转置互相转化. 因为初等变换和转置不改变矩阵的秩, 所以不妨假设

$$M = \begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix}.$$

设  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  和  $B \in \mathbb{R}^{k \times \ell}$ . 设  $\vec{A}^{(1)}, \dots, \vec{A}^{(p)}$  是  $V_c(A)$  的一组基,  $\vec{B}^{(1)}, \dots, \vec{B}^{(q)}$  是  $V_c(B)$  的一组基.

断言. 列向量  $\vec{M}^{(1)}, \dots, \vec{M}^{(p)}, \vec{M}^{(n+1)}, \dots, \vec{M}^{(n+q)}$  线性无关.

断言的证明. 设  $\alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_1, \dots, \beta_q \in \mathbb{R}$  使得

$$\alpha_1 \vec{M}^{(1)} + \dots + \alpha_p \vec{M}^{(p)} + \beta_1 \vec{M}^{(n+1)} + \dots + \beta_q \vec{M}^{(n+q)} = \mathbf{0}_{m+k}.$$

则

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} \vec{A}^{(1)} \\ \vec{C}^{(1)} \end{pmatrix} + \dots + \alpha_p \begin{pmatrix} \vec{A}^{(p)} \\ \vec{C}^{(p)} \end{pmatrix} + \beta_1 \begin{pmatrix} \mathbf{0}_m \\ \vec{B}^{(1)} \end{pmatrix} + \dots + \beta_q \begin{pmatrix} \mathbf{0}_m \\ \vec{B}^{(q)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_m \\ \mathbf{0}_k \end{pmatrix}.$$

于是,  $\alpha_1 \vec{A}^{(1)} + \dots + \alpha_p \vec{A}^{(p)} = \mathbf{0}_m$ . 故  $\alpha_1 = \dots = \alpha_p = 0$ .

进而  $\beta_1 \vec{B}^{(1)} + \dots + \beta_q \vec{B}^{(q)} = \mathbf{0}_k$ . 故  $\beta_1 = \dots = \beta_q = 0$ .

断言成立.

由断言可知,  $\text{rank}(M) \geq p + q = \text{rank}(A) + \text{rank}(B)$ .

设  $C = O_{k \times n}$ . 当  $j \in \{1, \dots, n\}$  时,

$$\vec{M}^{(j)} = \begin{pmatrix} \vec{A}^{(j)} \\ \mathbf{0}_k \end{pmatrix} \implies \vec{M}^{(j)} \in \langle \vec{M}^{(1)}, \dots, \vec{M}^{(p)} \rangle.$$

类似地, 当  $j \in \{n+1, \dots, n+\ell\}$  时,

$$\vec{M}^{(j)} \in \langle \vec{M}^{(n+1)}, \dots, \vec{M}^{(n+q)} \rangle.$$

根据断言,  $\text{rank}(M) = p + q = \text{rank}(A) + \text{rank}(B)$ .  $\square$

**推论 10.8** 设上述引理中  $A$  和  $B$  是可逆方阵, 则  $M$  也是可逆方阵.

证明. 设  $A \in M_m(\mathbb{R})$  和  $B \in M_n(\mathbb{R})$ . 则  $M \in M_{m+n}(\mathbb{R})$ . 则  $\text{rank}(M) \leq m + n$  (第二章第三讲例 3.10). 由上述引理,  $\text{rank}(M) \geq m + n$ . 故  $\text{rank}(M) = m + n$ . 于是,  $M$  可逆(第二章第五讲定理 7.14).  $\square$

**例 10.9** 设  $A \in \mathbb{R}^{m \times s}$  和  $B \in \mathbb{R}^{s \times n}$ . 证明

$$\text{rank}(AB) \geq \text{rank}(A) + \text{rank}(B) - s.$$

证明. 只要证  $\text{rank}(AB) + s \geq \text{rank}(A) + \text{rank}(B)$ . 设

$$M = \begin{pmatrix} AB & O \\ O & E_s \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(m+s) \times (n+s)}.$$

根据引理 10.7,  $\text{rank}(M) = \text{rank}(AB) + s$ . 我们计算

$$N := \begin{pmatrix} E_m & A \\ O & E_s \end{pmatrix} M = \begin{pmatrix} E_m & A \\ O & E_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} AB & O \\ O & E_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AB & A \\ O & E_s \end{pmatrix},$$

$$P := N \begin{pmatrix} E_n & O \\ -B & E_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AB & A \\ O & E_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_n & O \\ -B & E_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & A \\ -B & E_s \end{pmatrix}.$$

因为矩阵乘法不可能增加秩, 所以  $\text{rank}(M) \geq \text{rank}(P)$ .

由引理 10.7 得出,

$$\text{rank}(M) \geq \text{rank}(A) + \text{rank}(-B) = \text{rank}(A) + \text{rank}(B).$$

**例 10.10** (Sylvester 等式) 设  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ . 证明:

$$\text{rank}(E_m + AB) + n = \text{rank}(E_n + BA) + m.$$

证明. 设

$$M = \begin{pmatrix} E_m + AB & O \\ O & E_n \end{pmatrix} \in M_{m+n}(\mathbb{R}).$$

我们计算

$$N := \underbrace{\begin{pmatrix} E_m & A \\ O & E_n \end{pmatrix}}_{C_1} M = \begin{pmatrix} E_m + AB & A \\ O & E_n \end{pmatrix},$$

$$P := N \underbrace{\begin{pmatrix} E_m & O \\ -B & E_n \end{pmatrix}}_{C_2} = \begin{pmatrix} E_m & A \\ -B & E_n \end{pmatrix},$$

$$Q := \underbrace{\begin{pmatrix} E_m & O \\ B & E_n \end{pmatrix}}_{C_3} P = \begin{pmatrix} E_m & A \\ O & E_n + BA \end{pmatrix},$$

$$R := Q \underbrace{\begin{pmatrix} E_m & -A \\ O & E_n \end{pmatrix}}_{C_4} = \begin{pmatrix} E_m & O \\ O & E_n + BA \end{pmatrix}.$$

注意到  $C_1, C_2, C_3, C_4 \in M_{m+n}(\mathbb{R})$  且引理 10.7 蕴含

$$\text{rank}(C_i) \geq \text{rank}(E_m) + \text{rank}(E_n) = m + n.$$

故  $C_1, C_2, C_3, C_4$  都满秩. 根据第二章第九讲推论 6.27,

$$\text{rank}(M) = \text{rank}(R).$$

再由引理 10.7 可知,

$$\text{rank}(M) = \text{rank}(R) \implies \text{rank}(E_m + AB) + n = \text{rank}(E_n + BA) + m.$$

### 10.3 矩阵方程求解

**例 10.11** 设  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{m \times k}$ . 再设  $X$  是  $n \times k$  阶的未知矩阵. 求矩阵方程

$$AX = B \tag{2}$$

的所有解.

解. 根据打洞引理, 存在  $m$  阶可逆矩阵  $P$  和  $n$  阶可逆矩阵  $Q$  使得

$$PAQ = \begin{pmatrix} E_r & O_{r \times (n-r)} \\ O_{(m-r) \times r} & O_{(m-r) \times (n-r)} \end{pmatrix}.$$

于是, 原方程等价于

$$P^{-1} \begin{pmatrix} E_r & O_{r \times (n-r)} \\ O_{(m-r) \times r} & O_{(m-r) \times (n-r)} \end{pmatrix} Q^{-1} X = B.$$

即

$$\begin{pmatrix} E_r & O_{r \times (n-r)} \\ O_{(m-r) \times r} & O_{(m-r) \times (n-r)} \end{pmatrix} Q^{-1} X = PB.$$

令

$$Q^{-1} X = Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times k}, P = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix},$$

其中  $Y_1 \in \mathbb{R}^{r \times k}$ ,  $Y_2 \in \mathbb{R}^{(n-r) \times k}$ ,  $P_1 \in \mathbb{R}^{r \times m}$ ,  $P_2 \in \mathbb{R}^{(m-r) \times m}$ .

则方程转变为

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} E_r & O_{r \times (n-r)} \\ O_{(m-r) \times r} & O_{(m-r) \times (n-r)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} Y_1 \\ O_{(m-r) \times k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 B \\ P_2 B \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

于是, (2) 有解当且仅当  $P_2 B = O_{(m-r) \times k}$ . 当该条件成立时,

$$X = Q \begin{pmatrix} P_1 B \\ Y_2 \end{pmatrix},$$

其中  $Y_2 \in \mathbb{R}^{(n-r) \times k}$  是任意矩阵. 令  $Q = (Q_1, Q_2)$ , 其中

$Q_1 \in \mathbb{R}^{n \times r}, Q_2 \in \mathbb{R}^{n \times (n-r)}$ . 则

$$X = (Q_1, Q_2) \begin{pmatrix} P_1 B \\ Y_2 \end{pmatrix} = \underbrace{Q_1 P_1 B}_{\text{特解}} + \underbrace{Q_2 Y_2}_{\text{齐次部分通解}}.$$

利用上例中的符号和上次讲义注释 8.6, 我们可以假设可逆矩阵  $P$  满足  $PA$  是阶梯型. 则

$$PA = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} P_1 A \\ P_2 A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 A \\ O_{(m-r) \times n} \end{pmatrix}$$

且  $\text{rank}(P_1 A) = r$ . 于是

$$P(A|B) = \begin{pmatrix} P_1 A & P_1 B \\ O_{(m-r) \times n} & P_2 B \end{pmatrix}. \quad (3)$$

由此和上例可知, (2) 有解当且仅当

$$P(A|B) = \begin{pmatrix} P_1 A & P_1 B \\ O_{(m-r) \times n} & O_{(m-r) \times k} \end{pmatrix}. \quad (4)$$

**命题 10.12** 矩阵方程 (2) 有解当且仅当  $\text{rank}(A) = \text{rank}(A, B)$ .

证明. 利用上面例子的结果可知  $\text{rank}(A) = r$ . 设 (2) 有解. 则 (4) 成立. 故

$$\text{rank}(P(A, B)) = \text{rank}(P_1 A) = r = \text{rank}(A).$$

因为  $P$  可逆, 所以  $\text{rank}(A, B) = \text{rank}(A)$ .

反之, 设  $\text{rank}(A, B) = \text{rank}(A) = r$ . 由 (3) 可知,  $P_2 B = O_{(m-r) \times k}$ . 故 (4) 成立. 即矩阵方程 (2) 有解.  $\square$

## 第三章 行列式

### 1 多重线性斜对称函数

在本节中, 设  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$  是  $\mathbb{R}^n$  的标准基.

#### 1.1 $\mathbb{R}^n$ 上的多重线性函数

定义 1.1 映射:

$$\begin{aligned} f : \underbrace{\mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n}_m &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m) &\longmapsto f(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m) \end{aligned}$$

称为  $m$  重线性的, 如果对任意  $k \in \{1, 2, \dots, m\}$ ,  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$  和  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  我们有

$$\begin{aligned} &f(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{k-1}, \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}, \mathbf{x}_{k+1}, \dots, \mathbf{x}_m) \\ &= \alpha f(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}, \mathbf{x}_{k+1}, \dots, \mathbf{x}_m) \\ &+ \beta f(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{v}, \mathbf{x}_{k+1}, \dots, \mathbf{x}_m). \end{aligned}$$

例 1.2 一重线性函数就是  $\mathbb{R}^n$  上的线性函数. 设

$$\alpha_1 = f(\mathbf{e}_1), \dots, \alpha_n = f(\mathbf{e}_n) \in \mathbb{R}.$$



则

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n.$$

例 1.3 设

$$f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mapsto \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix},$$

其中

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

则  $f$  是  $\mathbb{R}^2$  上的二重线性函数.

验证. 设  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

则

$$\begin{aligned} f(\alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v}, \mathbf{y}) &= \det \begin{pmatrix} \alpha u_1 + \beta v_1 & y_1 \\ \alpha u_2 + \beta v_2 & y_2 \end{pmatrix} \\ &= (\alpha u_1 + \beta v_1)y_2 - (\alpha u_2 + \beta v_2)y_1 \\ &= \alpha(u_1y_2 - u_2y_1) + \beta(v_1y_2 - v_2y_1) \\ &= \alpha \det \begin{pmatrix} u_1 & y_1 \\ u_2 & y_2 \end{pmatrix} + \beta \det \begin{pmatrix} v_1 & y_1 \\ v_2 & y_2 \end{pmatrix} \\ &= \alpha f(\mathbf{u}, \mathbf{y}) + \beta f(\mathbf{v}, \mathbf{y}). \end{aligned}$$

类似地, 我们可验证  $f(\mathbf{x}, \alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v}) = \alpha f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + \beta f(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ .

故  $f$  是二重线性函数.

**例 1.4** 设  $f$  是  $\mathbb{R}^2$  上的二重线性函数,  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$ ,  $\alpha, \beta, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ . 展开  $f(\alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v}, \lambda \mathbf{x} + \mu \mathbf{y})$ .

解. 利用多重线性计算:

$$\begin{aligned} &f(\alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v}, \lambda \mathbf{x} + \mu \mathbf{y}) \\ &= \alpha f(\mathbf{u}, \lambda \mathbf{x} + \mu \mathbf{y}) + \beta f(\mathbf{v}, \lambda \mathbf{x} + \mu \mathbf{y}) \quad (\text{关于第一个变元线性}) \\ &= \alpha(\lambda f(\mathbf{u}, \mathbf{x}) + \mu f(\mathbf{u}, \mathbf{y})) + \beta(\lambda f(\mathbf{v}, \mathbf{x}) + \mu f(\mathbf{v}, \mathbf{y})) \\ &\quad (\text{关于第二个变元线性}) \\ &= \alpha \lambda f(\mathbf{u}, \mathbf{x}) + \alpha \mu f(\mathbf{u}, \mathbf{y}) + \beta \lambda f(\mathbf{v}, \mathbf{x}) + \beta \mu f(\mathbf{v}, \mathbf{y}). \end{aligned}$$

特别地

$$f(\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{x} + \mathbf{y}) = f(\mathbf{u}, \mathbf{x}) + f(\mathbf{u}, \mathbf{y}) + f(\mathbf{v}, \mathbf{x}) + f(\mathbf{v}, \mathbf{y})$$

和

$$f(\alpha \mathbf{u}, \alpha \mathbf{x}) = \alpha^2 f(\mathbf{u}, \mathbf{x}).$$

引理 1.5 设  $f$  是  $\mathbb{R}^n$  上  $m$  重线性函数,  $k \in \{1, \dots, m\}$ . 则

$$f(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{0}, \mathbf{x}_{k+1}, \dots, \mathbf{x}_m) = 0.$$

证明. 我们计算

$$\begin{aligned} & f(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{0}, \mathbf{x}_{k+1}, \dots, \mathbf{x}_m) \\ &= f(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{0} + \mathbf{0}, \mathbf{x}_{k+1}, \dots, \mathbf{x}_m) \\ &= f(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{0}, \mathbf{x}_{k+1}, \dots, \mathbf{x}_m) + f(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{0}, \mathbf{x}_{k+1}, \dots, \mathbf{x}_m) \\ &\implies f(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{0}, \mathbf{x}_{k+1}, \dots, \mathbf{x}_m) = 0. \quad \square \end{aligned}$$

令

$$f(\mathbf{e}_{j_1}, \mathbf{e}_{j_2}, \dots, \mathbf{e}_{j_m}) = a_{j_1, j_2, \dots, j_m}, \quad (5)$$

其中  $j_1, j_2, \dots, j_m \in \{1, 2, \dots, n\}$ . 我们利用这  $n^m$  个实数来计算一个  $m$  重线性函数的表达式. 再设

$$\mathbf{x}_i = \sum_{j=1}^n x_{i,j} \mathbf{e}_j, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

则

$$\begin{aligned}
 & f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_m) \\
 &= f\left(\sum_{j_1=1}^n x_{1,j_1} \mathbf{e}_{j_1}, \sum_{j_2=1}^n x_{2,j_2} \mathbf{e}_{j_2}, \dots, \sum_{j_m=1}^n x_{m,j_m} \mathbf{e}_{j_m}\right) \\
 &= \sum_{j_1=1}^n x_{1,j_1} f\left(\mathbf{e}_{j_1}, \sum_{j_2=1}^n x_{2,j_2} \mathbf{e}_{j_2}, \dots, \sum_{j_m=1}^n x_{m,j_m} \mathbf{e}_{j_m}\right) \\
 &= \sum_{j_1=1}^n \sum_{j_2=1}^n x_{1,j_1} x_{2,j_2} f\left(\mathbf{e}_{j_1}, \mathbf{e}_{j_2}, \dots, \sum_{j_m=1}^n x_{m,j_m} \mathbf{e}_{j_m}\right) \\
 &\quad \vdots \\
 &= \sum_{j_1=1}^n \sum_{j_2=1}^n \cdots \sum_{j_m=1}^n x_{1,j_1} x_{2,j_2} \cdots x_{m,j_m} f(\mathbf{e}_{j_1}, \mathbf{e}_{j_2}, \dots, \mathbf{e}_{j_m})
 \end{aligned}$$

故

$$f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_m) = \sum_{j_1=1}^n \sum_{j_2=1}^n \cdots \sum_{j_m=1}^n a_{j_1, j_2, \dots, j_m} x_{1, j_1} x_{2, j_2} \cdots x_{m, j_m}. \quad (6)$$

## 1.2 $\mathbb{R}^n$ 上的多重斜对称线性函数

定义 1.6 映射:

$$\begin{aligned}
 f: \underbrace{\mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n}_m &\longrightarrow \mathbb{R} \\
 (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m) &\mapsto f(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m)
 \end{aligned}$$

称为  $m$  重斜对称的, 如果对任意  $i, j \in \{1, 2, \dots, m\}$ ,

$$\begin{aligned}
 & f(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1}, \dots, \mathbf{x}_{j-1}, \mathbf{x}_j, \mathbf{x}_{j+1}, \dots, \mathbf{x}_m) \\
 &= -f(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{x}_j, \mathbf{x}_{i+1}, \dots, \mathbf{x}_{j-1}, \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{j+1}, \dots, \mathbf{x}_m).
 \end{aligned}$$

例 1.3 中二阶行列式是 2 重斜对称的. 这是因为

$$\det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} y_1 & x_1 \\ y_2 & x_2 \end{pmatrix}.$$

引理 1.7 设  $f$  是  $\mathbb{R}^n$  上的  $m$  重斜对称函数. 如果  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m$  中有两个向量相等, 则  $f(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m) = 0$ .

证明. 不妨设  $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2 := \mathbf{u}$ . 因为

$$f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \dots, \mathbf{x}_m) = -f(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_3, \dots, \mathbf{x}_m),$$

所以

$$\begin{aligned} f(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{x}_3, \dots, \mathbf{x}_m) &= -f(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{x}_3, \dots, \mathbf{x}_m) \\ \implies 2f(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{x}_3, \dots, \mathbf{x}_m) &= 0. \end{aligned}$$

因为  $2 \neq 0$ , 所以  $f(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{x}_3, \dots, \mathbf{x}_m) = 0$ .  $\square$

设  $f$  是  $\mathbb{R}^n$  上  $n$  重斜对称线性函数. 我们利用  $m = n$  时公式 (5) 和 (6) 推导  $f$  的表达式. 由引理 1.7, 如果下标  $j_1, \dots, j_n$  中有两个相同, 则  $a_{j_1, \dots, j_n} = 0$ . 若  $j_1, \dots, j_n$  两两不同, 则这些下标对应一个置换

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_n \end{pmatrix}.$$

即  $(j_1, \dots, j_n) = (\sigma(1), \dots, \sigma(n))$ . 再根据 (6), 我们有

$$f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) = \sum_{\sigma \in S_n} a_{\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n)} x_{1, \sigma(1)} x_{2, \sigma(2)} \cdots x_{n, \sigma(n)}. \quad (7)$$

设  $w = f(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ . 我们来研究  $w$  和  $a_{\sigma(1), \dots, \sigma(n)}$  之间的关系. 根据 (5),

$$a_{\sigma(1), \dots, \sigma(n)} = f(\mathbf{e}_{\sigma(1)}, \dots, \mathbf{e}_{\sigma(n)}).$$

下面我们证明:

断言.  $a_{\sigma(1), \dots, \sigma(n)} = \epsilon_{\sigma} w$ .

证明. 设  $\sigma = \tau_1 \cdots \tau_k$ , 其中  $\tau_1, \dots, \tau_k$  是对换. 如果  $k = 1$ , 则可设  $\sigma = (i, j)$ . 于是,

$$\begin{aligned} a_{\sigma(1), \dots, \sigma(n)} &= f(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{i-1}, \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_{i+1}, \dots, \mathbf{e}_{j-1}, \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_{j+1}, \dots, \mathbf{e}_n) \\ &= -f(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{i-1}, \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_{i+1}, \dots, \mathbf{e}_{j-1}, \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_{j+1}, \dots, \mathbf{e}_n) \\ &= -w. \end{aligned}$$

断言在  $k = 1$  时成立. 设  $k > 1$  且断言对  $k-1$  成立. 考虑  $k$  时. 令  $\pi = \tau_2 \cdots \tau_k$ . 则  $\sigma = \tau_1 \pi$ . 我们有

$$\begin{aligned} a_{\sigma(1), \dots, \sigma(n)} &= f(\mathbf{e}_{\sigma(1)}, \dots, \mathbf{e}_{\sigma(n)}) \\ &= f(\mathbf{e}_{\tau_1 \pi(1)}, \dots, \mathbf{e}_{\tau_1 \pi(n)}) \\ &= -f(\mathbf{e}_{\pi(1)}, \dots, \mathbf{e}_{\pi(n)}) \\ &= -\epsilon_{\pi} f(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) \quad (\text{归纳假设}) \\ &= \epsilon_{\sigma} w. \end{aligned}$$

断言成立.

由此断言和 (7) 可知

$$f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) = w \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon_{\sigma} x_{1, \sigma(1)} x_{2, \sigma(2)} \cdots x_{n, \sigma(n)}. \quad (8)$$

于是, 每个  $\mathbb{R}^n$  上的  $n$  重斜线性函数都具有形式 (8) 且具有上述形式的函数必然  $n$  重斜线性, 其中  $w$  可取任意实数.

## 2 行列式的定义和基本性质

**定义 2.1** 行列式函数:

$$\det : \underbrace{\mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n}_{(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\quad \quad \quad \mapsto \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon_{\sigma} x_{1,\sigma(1)} \cdots x_{n,\sigma(n)},$$

其中

$$\mathbf{x}_j = \begin{pmatrix} x_{1,j} \\ \vdots \\ x_{n,j} \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

由 (8) 可知,  $\det$  是  $\mathbb{R}^n$  上的  $n$  重线性斜对称函数.

**注解 2.2** 根据 (7) 中  $w$  的定义,  $\det(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) = 1$ .

**定义 2.3** 设  $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{R})$ . 矩阵  $A$  的行列式是

$$\det \left( \vec{A}^{(1)}, \dots, \vec{A}^{(n)} \right). \quad (\text{函数版})$$

等价地,

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon_{\sigma} a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{n,\sigma(n)}. \quad (\text{系数版}) \quad (9)$$

矩阵  $A$  的行列式记为  $\det(A)$  或  $|A|$ .

例 2.4 根据注解 2.2,

$$\det(E_n) = \det(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) = 1.$$

根据引理 1.5, 如果方阵  $A$  中有一列等于零, 则  $\det(A) = 0$ .

由函数版的定义可知,  $\det(A)$  是关于  $A$  的列的  $n$  重线性斜函数. 由此得出下列基本性质.

(L1) 如果  $\vec{A}^{(j)} = \alpha \mathbf{v}$ , 其中  $\alpha \in \mathbb{R}$  和  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ .

$$\det(A) = \alpha \det \left( \vec{A}^{(1)}, \dots, \vec{A}^{(j-1)}, \mathbf{v}, \vec{A}^{(j+1)}, \dots, \vec{A}^{(n)} \right).$$

(L2)  $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$ .

(L3) 设  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$  且  $\vec{A}^{(j)} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$ . 则

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det \left( \vec{A}^{(1)}, \dots, \vec{A}^{(j-1)}, \mathbf{u}, \vec{A}^{(j+1)}, \dots, \vec{A}^{(n)} \right) \\ &\quad + \det \left( \vec{A}^{(1)}, \dots, \vec{A}^{(j-1)}, \mathbf{v}, \vec{A}^{(j+1)}, \dots, \vec{A}^{(n)} \right). \end{aligned}$$

(L4) 设  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$  且  $\vec{A}^{(j)} = \sum_{k=1}^m \alpha_k \mathbf{v}_k$ , 其中  $\alpha_i \in \mathbb{R}$  和  $\mathbf{v}_i \in \mathbb{R}^n$ . 则

$$\det(A) = \sum_{k=1}^m \alpha_k \det \left( \vec{A}^{(1)}, \dots, \vec{A}^{(j-1)}, \mathbf{v}_k, \vec{A}^{(j+1)}, \dots, \vec{A}^{(n)} \right).$$

在上述性质中 (L1) 和 (L3) 成立是因为多重线性函数关于一个变元是线性的. 性质 (L4) 是 (L1) 和 (L3) 的推论(用归



纳法直接可得). 性质 (L2) 可以通过  $n$  次利用 (L1) 得出. 具体过程如下

$$\begin{aligned}
 \det(\alpha A) &= \det(\alpha \vec{A}^{(1)}, \alpha \vec{A}^{(2)}, \dots, \alpha \vec{A}^{(n)}) \\
 &= \alpha \det(\vec{A}^{(1)}, \alpha \vec{A}^{(2)}, \dots, \alpha \vec{A}^{(n)}) \quad (\text{对第一列用 (L1)}) \\
 &= \alpha^2 \det(\vec{A}^{(1)}, \vec{A}^{(2)}, \alpha \vec{A}^{(3)} \dots, \alpha \vec{A}^{(n)}) \quad (\text{对第二列用 (L1)}) \\
 &\vdots \\
 &= \alpha^n \det(\vec{A}^{(1)}, \vec{A}^{(2)}, \dots, \vec{A}^{(n)}) \\
 &= \alpha^n \det(A).
 \end{aligned}$$

**例 2.5** 证明:  $D_n = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  的行列式等于  $\lambda_1 \cdots \lambda_n$ .

证明. 我们计算

$$\begin{aligned}
 \det(D_n) &= \det(\lambda_1 \mathbf{e}_1, \lambda_2 \mathbf{e}_2, \dots, \lambda_n \mathbf{e}_n) \\
 &= \lambda_1 \det(\mathbf{e}_1, \lambda_2 \mathbf{e}_2, \dots, \lambda_n \mathbf{e}_n) \quad (\text{对第一列用 (L1)}) \\
 &= \lambda_1 \lambda_2 \det(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \lambda_3 \mathbf{e}_3 \dots, \lambda_n \mathbf{e}_n) \quad (\text{对第二列用 (L1)}) \\
 &\vdots \\
 &= \lambda_1 \cdots \lambda_n \det(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n) = \lambda_1 \cdots \lambda_n.
 \end{aligned}$$

利用行列式函数是斜对称的和性质 (L4), 我们得到:

(S1) 设交换方阵  $A$  中两不同列的位置得到方阵  $B$ , 则

$$\det(B) = -\det(A).$$

(S2) 如果方阵  $A$  中有两列相同, 则  $\det(A) = 0$ ;

(S3) 如果  $A$  中某列是其它列的线性组合, 则  $\det(A) = 0$ .

(S4) 把  $A$  中某一系列的倍式加到另一列上得到矩阵  $B$ , 则  $\det(B) = \det(A)$ .

性质 (S1) 来自斜对称函数的定义. 性质 (S2) 是引理 1.7 的直接推论. 性质 (S3) 推导过程如下: 不妨设

$$\vec{A}^{(n)} = \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j \vec{A}^{(j)}.$$

则

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det(\vec{A}^{(1)}, \vec{A}^{(2)}, \dots, \vec{A}^{(n-1)}, \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j \vec{A}^{(j)}) \\ &= \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j \det(\vec{A}^{(1)}, \vec{A}^{(2)}, \dots, \vec{A}^{(n-1)}, \vec{A}^{(j)}) \quad (\text{对第 } n \text{ 列用 (L4)}) \\ &= 0. \quad (\text{对和式中每个行列式用 (S2)}) \end{aligned}$$

性质 (S4) 的推导过程与 (S3) 类似. 具体过程如下, 不妨设

$$B = (\vec{A}^{(1)} + \alpha \vec{A}^{(2)}, \vec{A}^{(2)}, \dots, \vec{A}^{(n)}),$$

其中  $\alpha \in \mathbb{R}$ . 则

$$\begin{aligned}\det(B) &= \det(\vec{A}^{(1)} + \alpha\vec{A}^{(2)}, \vec{A}^{(2)}, \dots, \vec{A}^{(n)}) \\ &= \det(A) + \alpha \det(\vec{A}^{(2)}, \vec{A}^{(2)}, \dots, \vec{A}^{(n-1)}) \quad (\text{对第一列用 (L4)}) \\ &= \det(A). \quad (\text{对第二个行列式用 (S2)})\end{aligned}$$

**例 2.6** 设  $A \in M_n(\mathbb{R})$ . 证明:  $A$  不满秩蕴含  $\det(A) = 0$ .

证明. 因为  $A$  不满秩, 所以  $A$  的列向量线性相关. 故某个列向量是其它列的线性组合(第二章第一讲命题 1.11 (iii)). 由性质 (S3) 可知,  $\det(A) = 0$ .

**例 2.7** 计算  $n$  阶初等矩阵的行列式.

解. 由性质 (S1) 可知,  $\det(F_{i,j}^{(n)}) = -1$  在  $i \neq j$  时成立. 否则其行列式等于 1. 由性质 (S4) 可知,  $\det(F_{i,j}^{(n)})(\alpha) = 1$ . 由性质 (L1) 可知,  $\det(F_i^{(n)}(\lambda)) = \lambda$ .

下面我们来研究系数版的行列式定义.

**例 2.8** 设

$$A_n = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

则

$$\begin{aligned}\det(A_2) &= \epsilon_e a_{1,e(1)} a_{2,e(2)} + \epsilon_{(12)} a_{1,(12)(1)} a_{2,(12)(2)} \\ &= a_{1,1} a_{2,2} - a_{1,2} a_{2,1}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\det(A_3) &= \epsilon_e a_{1,e(1)} a_{2,e(2)} a_{3,e(3)} + \epsilon_{(12)} a_{1,(12)(1)} a_{2,(12)(2)} a_{3,(12)(3)} \\ &\quad + \epsilon_{(13)} a_{1,(13)(1)} a_{2,(13)(2)} a_{3,(13)(3)} + \epsilon_{(23)} a_{1,(23)(1)} a_{2,(23)(2)} a_{3,(23)(3)} \\ &\quad + \epsilon_{(123)} a_{1,(123)(1)} a_{2,(123)(2)} a_{3,(123)(3)} \\ &\quad + \epsilon_{(213)} a_{1,(213)(1)} a_{2,(213)(2)} a_{3,(213)(3)} \\ &= a_{1,1} a_{2,2} a_{3,3} - a_{1,2} a_{2,1} a_{3,3} \\ &\quad - a_{1,3} a_{2,2} a_{3,1} - a_{1,1} a_{2,3} a_{3,2} \\ &\quad + a_{1,2} a_{2,3} a_{3,1} \\ &\quad + a_{1,3} a_{2,1} a_{3,2}.\end{aligned}$$

**命题 2.9** 设

$$T_u = \begin{pmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & u_{1,3} & \cdots & u_{1,n} \\ 0 & u_{2,2} & u_{2,3} & \cdots & u_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & u_{n,n} \end{pmatrix}$$

和

$$T_\ell = \begin{pmatrix} \ell_{1,1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \ell_{2,1} & \ell_{2,2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \ell_{n,1} & \ell_{n,2} & \ell_{n,3} & \cdots & \ell_{n,n} \end{pmatrix}$$

则

$$\det(T_u) = u_{1,1}u_{2,2}\cdots u_{n,n} \quad \text{和} \quad \det(T_\ell) = \ell_{1,1}\ell_{2,2}\cdots \ell_{n,n}.$$

证明. 我们来证明上三角情形, 下三角情形类似.

设  $T_u = (u_{i,j})_{n \times n}$ . 则当  $i < j$  时,  $u_{i,j} = 0$ . 在  $\det(T_u)$  的和式表示 (9) 中的一项是

$$a_\sigma = \epsilon_\sigma u_{1,\sigma(1)} \cdots u_{n,\sigma(n)},$$

其中  $\sigma \in S_n$ . 如果存在某个  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , 使得  $i > \sigma(i)$ , 则  $a_\sigma = 0$ . 于是,  $a_\sigma \neq 0$  蕴含  $i \leq \sigma(i)$  对所有  $i = 1, 2, \dots, n$  成立. 故  $\sigma$  必然是恒同映射. 我们得到

$$\det(T_u) = a_e = \epsilon_e u_{1,e(1)} \cdots u_{n,e(n)} = u_{1,1} \cdots u_{n,n}. \quad \square$$

下面我们通过矩阵转置把上面关于列的性质推广到行的情形.

**命题 2.10** 设  $A \in M_n(\mathbb{R})$ . 则  $\det(A) = \det(A^t)$ .

证明. 设  $A = (a_{i,j})_{n \times n}$  和  $A^t = (a'_{i,j})_{n \times n}$ . 则  $a'_{i,j} = a_{j,i}$ ,  $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ . 根据 (9),

$$\det(A^t) = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon_\sigma a'_{1,\sigma(1)} \cdots a'_{n,\sigma(n)}.$$

由转置定义可知,

$$\det(A^t) = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon_\sigma a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n}.$$

该和式可重写为:

$$\det(A^t) = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon_{\sigma} a_{\sigma(1), \sigma^{-1}\sigma(1)} \cdots a_{\sigma(n), \sigma^{-1}\sigma(n)}.$$

因为  $\{\sigma(1), \dots, \sigma(n)\} = \{1, 2, \dots, n\}$ , 所以

$$\det(A^t) = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon_{\sigma} a_{1, \sigma^{-1}(1)} \cdots a_{n, \sigma^{-1}(n)}.$$

因为  $\epsilon_{\sigma} = \epsilon_{\sigma^{-1}}$ , 所以

$$\det(A^t) = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon_{\sigma^{-1}} a_{1, \sigma^{-1}(1)} \cdots a_{n, \sigma^{-1}(n)}.$$

再因为  $S_n = \{\sigma^{-1} \mid \sigma \in S_n\}$ , 所以

$$\det(A^t) = \sum_{\sigma^{-1} \in S_n} \epsilon_{\sigma^{-1}} a_{1, \sigma^{-1}(1)} \cdots a_{n, \sigma^{-1}(n)}.$$

根据 (9),  $\det(A^t) = \det(A)$ .  $\square$

上述命题蕴含我们验证过的性质 (L1) 到 (L4) 和 (S1) 到 (S4) 中所有列向量都可以换成行向量. 例如性质: “交换矩阵两不同行行列式变号”, 可以通过以下方法验证. 设  $B$  是交换  $A$  的第  $i$  行和第  $j$  行得到的矩阵, 其中  $i \neq j$ . 则把  $A^t$  中第  $i$  列和第  $j$  列交换后得到的矩阵是  $B^t$ . 由性质 (S1) 可知  $\det(B^t) = -\det(A^t)$ . 再根据命题 2.10,  $\det(B) = \det(B^t)$  和  $\det(A) = \det(A^t)$ . 故  $\det(B) = -\det(A)$ .

**例 2.11** 设  $A \in M_{2n+1}(\mathbb{R})$  斜对称. 证明:  $\det(A) = 0$ .

证明. 因为  $A^t = -A$ , 所以  $\det(A) = \det(-A)$  (命题 2.10).  
根据性质 (L2),

$$\det(-A) = (-1)^{2n+1} \det(A) = -\det(A).$$

于是,  $\det(A) = -\det(A)$ . 从而  $\det(A) = 0$ .

计算行列式的一个基本方法是通过第一和第二类初等变换把给定的行列式对应的矩阵化为上三角或下三角形矩阵, 然后利用命题 2.9 计算给定行列式的值. 需要注意的是: 应用一次第一类初等变换行列式的值会变号(性质(S1)); 而应用一次第二类初等变换行列式的值不变(性质(S4)). 当利用第三类初等变换时, 行列式要乘以适当的实数.

**例 2.12** 计算矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{和} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

的行列式的值.

证明. 利用第二类初等行变换可得

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = -8.$$

利用第一类初等行变换可得

$$\det(B) = -\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -1.$$

**例 2.13** 展开  $n$  阶矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{pmatrix}$$

的行列式.

解. 多次应用性质  $(S_4)$  可得

$$\det(A) = \begin{pmatrix} a + (n-1)b & b & b & \cdots & b \\ a + (n-1)b & a & b & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a + (n-1)b & b & b & \cdots & a \end{pmatrix}.$$



根据性质 (L1) 得

$$\det(A) = (a + (n - 1)b) \begin{pmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ 1 & a & b & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & b & b & \cdots & a \end{pmatrix}.$$

再利用第二类初等行变换, 我们有

$$\det(A) = (a + (n - 1)b) \begin{pmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ 0 & a - b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a - b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a - b \end{pmatrix} = (a + (n - 1)b)(a - b)^{n-1}.$$

**定理 2.14** 设  $A \in M_n(\mathbb{R})$ . 则  $\det(A) \neq 0$  当且仅当  $\text{rank}(A) = n$ .

证明. 根据例 2.6, 我们有  $\det(A) \neq 0 \implies \text{rank}(A) = n$ . 反之, 设  $\text{rank}(A) = n$ . 则通过第一和第二类初等行变换, 我们可以把  $A$  变成阶梯型(上三角)矩阵

$$T_u = \begin{pmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & u_{1,3} & \cdots & u_{1,n} \\ 0 & u_{2,2} & u_{2,3} & \cdots & u_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & u_{n,n} \end{pmatrix}.$$

于是,  $\det(A) = \pm \det(T_u)$ . 根据第二章第二讲引理 3.2,  $\text{rank}(T_u) = n$ . 我们推出  $T_u$  对角线上的元素都非零. 根据命题 2.9,  $\det(T_u) \neq 0$ . 从而  $\det(A) \neq 0$ .  $\square$

**推论 2.15** 设  $A \in M_n(\mathbb{R})$ . 则  $\det(A) \neq 0$  当且仅当  $A$  可逆.

证明. 由上述定理和第二章第五讲定理 7.14 直接可得.  $\square$

**例 2.16** 证明实数上的奇数阶斜对称矩阵都不可逆.

证明. 由例 2.11 可知, 任何奇数阶斜对称矩阵的行列式都等于零. 根据上述推论, 奇数阶斜对称矩阵都不可逆.

## 3 行列式的进一步性质

### 3.1 行列式按一行(列)展开

**定义 3.1** 设  $A \in M_n(\mathbb{R})$ ,  $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ . 去掉  $A$  中第  $i$  行和第  $j$  列得到的  $(n-1)$  阶方阵的行列式称为  $A$  关于  $i$  行和第  $j$  列的  $(n-1)$  阶余子式(*co-minor*), 记为  $M_{i,j}$ . 而  $A_{i,j} := (-1)^{i+j} M_{i,j}$  称为  $A$  关于  $i$  行和第  $j$  列的代数余子式.

**例 3.2** 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

则

$$M_{1,1} = \det \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} \quad \text{和} \quad A_{2,3} = (-1)^{2+3} \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = -M_{2,3}.$$

**定理 3.3** 设  $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{R})$ . 则对于任意的  $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,

$$\det(A) = \underbrace{\sum_{k=1}^n a_{i,k} A_{i,k}}_{\text{按一行展开}} \quad \text{和} \quad \det(A) = \underbrace{\sum_{k=1}^n a_{k,j} A_{k,j}}_{\text{按一列展开}}.$$

证明. 断言 1. 设  $A$  中最后一行中前  $(n-1)$  个元素都等于零. 则  $\det(A) = a_{n,n} A_{n,n}$ .

断言 1 的证明. 由行列式的定义可知

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon_{\sigma} a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{n-1,\sigma(n-1)} a_{n,\sigma(n)}.$$

因为当  $n \neq \sigma(n)$  时,  $a_{n,\sigma(n)} = 0$ , 所以

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n, \sigma(n)=n} \epsilon_{\sigma} a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{n-1,\sigma(n-1)} a_{n,n}.$$

故

$$\det(A) = a_{n,n} \sum_{\tau \in S_{n-1}} \epsilon_{\tau} a_{1,\tau(1)} \cdots a_{n-1,\tau(n-1)} = a_{n,n} M_{n,n} = a_{n,n} A_{n,n}.$$

断言 1 成立.

断言 2. 设  $A$  中第  $i$  行中只有第  $j$  个元素非零. 则  $\det(A) = a_{i,j} A_{i,j}$ .

断言 2 的证明. 把  $A$  中第  $i$  行与  $\vec{A}_{i+1}, \dots, \vec{A}_n$  逐个对调, 然后把所得矩阵的第  $j$  列与第  $(j+1)$  列至第  $n$  列逐个对调,

我们得到矩阵

$$B = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} & a_{1,j} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} & a_{i-1,j} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} & a_{i+1,j} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,j-1} & a_{n-1,j+1} & \cdots & a_{n-1,n} & a_{n-1,j} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{i,j} \end{pmatrix}.$$

由断言 1,  $\det(B) = a_{i,j}M_{i,j}$ . 由行列式性质 (S1),

$$\det(B) = (-1)^{n-i+n-j} \det(A) = (-1)^{i+j} \det(A) \implies \det(A) = a_{i,j}A_{i,j}.$$

断言 2 成立.