第二章　矩阵

推论 7.15 矩阵 $A\in\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ 可逆当且仅当存在 $B\in\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ 使得 $AB=E$ 或 $BA=E$.

证明. 这是因为 $AB=E$ 或 $BA=E$ 都可推出 A 满秩. □

注解 7.16 上述推论也可以根据第二章第三讲推论 *5.15* 推出. 这是因为 $\phi_A:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^n$ 是单射当且仅当它是满射当且仅当它是双射.

命题 7.17 设 $A\in\mathrm{M}_m(\mathbb{R})$. 如果 A 可逆, 则存在唯一的矩阵 $B\in\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ 使得 $AB=E$ 或 $BA=E$.

证明. 因为 A 可逆, 所以存在 $C\in\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ 使得 $CA=AC=E$. 设 $AB=E$. 则

$$C(AB)=C\Longrightarrow(CA)B=C\Longrightarrow EB=C\Longrightarrow B=C.$$

类似地, 如果 $D\in\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ 使得 $DA=E$, 则 $D=C$. □

由上述推论可知, 可逆矩阵的逆是唯一的. 我们把可逆矩阵 A 的逆矩阵记为 A^{-1}. 可逆矩阵的逆的唯一性也可以由双射逆的唯一性直接推出(第一章第二讲命题 4.13).

命题 7.18 设 $A,B\in\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ 都可逆. 则

(i) AB 可逆且它的逆是 $B^{-1}A^{-1}$;

(ii) A^{-1} 可逆, 它的逆是 $(A^{-1})^{-1} = A$;

(iii) A^t 可逆, 且其逆是 $(A^{-1})^t$.

证明. (i) $AB(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AEA^{-1} = E$. 类似可验证 $(B^{-1}A^{-1})AB = E$.

(ii) 这是因为 $AA^{-1} = A^{-1}A = E$.

(iii) 由第二章第四讲命题 6.23 可知,

$$A^t(A^{-1})^t = (A^{-1}A)^t = E^t = E.$$

类似地, $(A^{-1})^tA^t = E$. □

注解 7.19 上述命题中第一个结论实际上是逆映射的穿衣脱衣规则*(*第一章第二讲命题 *4.14 (ii))*, 而第二个结论对应着第一章第二讲命题 *4.14 (i)*.

例 7.20 设 $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. 则线性方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 确定当且仅当 A 可逆. 此时它的唯一解是 $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$.

例 7.21 设 $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ 幂零. 证明 $E - A$ 可逆.

证明. 设 $A^k = E$, 其中 $k > 0$. 则

$$E = E - A^k = (E - A)(E + A + \cdots + A^{k-1}).$$

故 $(E - A)^{-1} = E + A + \cdots + A^{k-1}$. □

例 7.22 设 $A{\in}\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ 幂等. 证明*:* 如果 A 可逆, 则 $A{=}E$.

证明. 因为 $A^2=A$, 所以 $A(A-E)=O$. 故

$$A^{-1}A(A-E)=O \Longrightarrow A-E=O.$$

我们得到 $A=E$. $\square$

7.4 杂例

设

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}).$$

证明: 对 $m\in\mathbb{Z}^+$,

$$A^m=\begin{pmatrix} f_{m-1} & f_m \\ f_m & f_{m+1} \end{pmatrix},$$

其中 $f_0=0, f_1=1, f_2=1, f_{m+1}=f_m+f_{m-1}$.

证明. $m=1$ 时, 结论显然. 设 $m>1$ 且 $m-1$ 时结论成立. 则

$$\begin{aligned} A^m=A^{m-1}A &= \begin{pmatrix} f_{m-2} & f_{m-1} \\ f_{m-1} & f_m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} f_{m-1} & f_{m-1}+f_{m-2} \\ f_m & f_m+f_{m-1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} f_{m-1} & f_m \\ f_m & f_{m+1} \end{pmatrix}. \quad \square \end{aligned}$$

设

$$\lambda_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \lambda_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

和

$$B=\begin{pmatrix}-\frac{\lambda_2}{5} & \frac{1}{5}\\ -\sqrt{5}\lambda_1 & \sqrt{5}\end{pmatrix}.$$

不难计算

$$B^{-1}=\begin{pmatrix}\sqrt{5} & -\frac{1}{5}\\ \sqrt{5}\lambda_1 & -\frac{\lambda_2}{5}\end{pmatrix}\quad 和\quad A=B^{-1}\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}B.$$

验证:

$$\begin{pmatrix}\sqrt{5} & -\frac{1}{5}\\ \sqrt{5}\lambda_1 & -\frac{\lambda_2}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{\lambda_2}{5} & \frac{1}{5}\\ -\sqrt{5}\lambda_1 & \sqrt{5}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{5}}{5}(\lambda_1-\lambda_2) & 0\\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{5}(\lambda_1-\lambda_2)\end{pmatrix}=E_2$$

和

$$\begin{aligned}&\begin{pmatrix}\sqrt{5} & -\frac{1}{5}\\ \sqrt{5}\lambda_1 & -\frac{\lambda_2}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{\lambda_2}{5} & \frac{1}{5}\\ -\sqrt{5}\lambda_1 & \sqrt{5}\end{pmatrix}\\ =&\begin{pmatrix}\sqrt{5}\lambda_1 & -\frac{1}{5}\lambda_2\\ \sqrt{5}\lambda_1^2 & -\frac{\lambda_2^2}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{\lambda_2}{5} & \frac{1}{5}\\ -\sqrt{5}\lambda_1 & \sqrt{5}\end{pmatrix}\\ =&\begin{pmatrix}0 & \frac{\sqrt{5}}{5}(\lambda_1-\lambda_2)\\ \frac{\sqrt{5}}{5}\lambda_1\lambda_2(\lambda_2-\lambda_1) & \frac{\sqrt{5}}{5}(\lambda_1^2-\lambda_2^2)\end{pmatrix}=A.\end{aligned}$$

注意到: 对任意 $C\in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\left(B^{-1}CB\right)^m=B^{-1}C^mB.$$

故

$$A^m=B^{-1}\mathrm{diag}(\lambda_1^m,\lambda_2^m)B.$$

于是,

$$f_m = \left(\sqrt{5}\lambda_1^m, -\frac{1}{5}\lambda_2^m\right)\vec{B}^{(2)} = \frac{\sqrt{5}}{5}(\lambda_1^m - \lambda_2^m).$$

于是, Fibonacci 序列的闭形式是

$$f_m = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^m - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^m\right).$$

注意到

$$f_0 = 0, f_1 = 1, f_2 = 1, f_3 = 2, f_4 = 3, \ldots, f_{10} = 55,$$

但

$$f_{50} = 12586269025.$$

渐近公式是

$$\lim_{m\to\infty}\frac{f_m}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^m} = \frac{\sqrt{5}}{5} \Longrightarrow f_m \sim \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^m.$$

小结. Fibonacci 序列:

$$\underbrace{f_0 = 0,\ f_1 = 1,\ f_2 = 1,\ f_{m+1} = f_m + f_{m-1}}_{\text{递归公式}},$$

$$\underbrace{f_m = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^m - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^m\right)}_{\text{闭形式}},$$

和

$$\underbrace{f_m \sim \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^m .}_{\text{渐进公式}}$$

8 矩阵的初等等价

定义 8.1 设 $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$. 如果存在 m 阶可逆方阵 P 和 n 阶可逆方阵 Q 使得 $A = PBQ$. 则称 A 与 B 初等等价. 记为 $A \sim_e B$.

我们来验证 $\sim_e$ 是等价关系. 对任意 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, 我们有 $A = E_m A E_n$. 于是, $A \sim_e A$. 自反性成立.

再设 $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 满足 $A \sim_e B$. 则存在 m 阶可逆方阵 B 和 n 阶可逆方阵 Q 使得 $A = PBQ$. 则 $B = P^{-1}AQ^{-1}$. 故 $B \sim_e A$. 对称性成立.

设 $C \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 且 $A \sim_e B$ 和 $B \sim_e C$. 则存在 m 阶可逆方阵 P 和 n 阶可逆方阵 Q 使得 $A = PBQ$ 和 $B = SCT$. 故 $A = (PS)C(TQ)$. 因为可逆方阵的积仍可逆, 所以 $A \sim_e C$. 传递性成立.

我们将证明

定理 8.2 设 $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$. 则 $A \sim_e B$ 当且仅当

$$\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(B).$$

为此, 我们需要用矩阵乘法来解释初等变换.

定义 8.3 设 $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

(i) $F_{i,j}^{(n)}$ 是把 E_n 中第 i 行和第 j 行互换的得到的矩阵. 称之为第一类初等矩阵.

(ii) 设 $\alpha \in \mathbb{R}$ 且 $i \neq j$. 则 $F_{i,j}^{(n)}(\alpha)$ 是把 E_n 中第 j 行通乘 α 加到第 i 行得到的矩阵. 称之为第二类初等矩阵.

(iii) 设 $\lambda \in \mathbb{R}$ 且 $\lambda \neq 0$. 则 $F_{i}^{(n)}(\lambda)$ 是把 E_n 中第 i 行通乘 λ 得到的矩阵. 称之为第三类类初等矩阵.

这三类矩阵统称为 n 阶初等矩阵.

我们可以通过搬运工引理(上一讲引理 7.12)中定义矩阵 $E_{i,j}^{(k)}$ 表示 初等矩阵如下:

$$F_{i,j}^{(n)} = E_n - E_{i,i}^{(n)} - E_{j,j}^{(n)} + E_{i,j}^{(n)} + E_{j,i}^{(n)}, \tag{1}$$

$$F_{i,j}^{(n)}(\alpha) = E_n + \alpha E_{i,j}^{(n)}, \tag{2}$$

和

$$F_{i,j}^{(n)}(\alpha) = E_n + (\lambda - 1) E_{i,i}^{(n)}. \tag{3}$$

设 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. 根据 (1),

$$F_{i,j}^{(m)} A = A - E_{i,i}^{(m)} A - E_{j,j}^{(m)} A + E_{i,j}^{(m)} A + E_{j,i}^{(m)} A.$$

根据搬运工引理, $F_{i,j}^{(m)}A$ 是把 A 中 i,j 两行对换得到的矩阵. 根据 (2),

$$F_{i,j}^{(m)}(\alpha)A = A + \alpha E_{i,j}^{(m)}A.$$

同理, $F_{i,j}^{(m)}(\alpha)A$ 是把 A 中第j 行乘以 α 后加到第 i 行得到的矩阵. 根据 (3),

$$F_{i}^{(m)}(\lambda)A = A + (\lambda-1)E_{i,i}^{(m)}A.$$

从而得到把 A 中第 i 行通乘 λ 的矩阵.

类似地, $AF_{i,j}^{(n)}$, $AF_{i,j}^{(n)}(\alpha)$ 和 $AF_{i}^{(n)}(\lambda)$ 分别是把 A 中 i,j 两行对换, 把 A 中第 i 列乘以 α 后加到第 j 列, 和把 A 中第 i 列通乘 λ 后得到的矩阵.

注解 8.4 可直接验证 $(F_{i,j}^{(n)})^2 = E_n$, $F_{i,j}^{(n)}(\alpha)F_{i,j}^{(n)}(-\alpha) = E_n$, 和 $F_{i}^{(n)}(\lambda)F_{i}^{(n)}(\lambda^{-1}) = E_n$. 故初等矩阵都是可逆的, 且它们的逆也是初等矩阵.

引理 8.5 *(打洞引理)* 设 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. 则存在可逆矩阵 $P \in \mathrm{M}_m(\mathbb{R})$ 和 $Q \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, 其中 P 和 Q 都是初等矩阵的乘积, 使得

$$PAQ = \begin{pmatrix} E_r & O_{r\times(n-r)} \\ O_{(m-r)\times r} & O_{(m-r)\times(n-r)} \end{pmatrix},$$

且 $\mathrm{rank}(A) = r$.

证明. 根据第一章第一讲命题 2.3 和第三类初等行变换, 存在若干个 m 阶初等矩阵, 使得它们的积 P 满足

$$PA = \begin{pmatrix}
0\cdots0 & 1 & * & \cdots & * & * & * & \cdots & * & * & *\cdots* \\
0\cdots0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * & * & *\cdots* \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0\cdots0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & *\cdots* \\
0\cdots0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\cdots0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0\cdots0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\cdots0
\end{pmatrix},$$

其中共有 r 行非零. 则存在若干个 n 阶第一类初等矩阵, 使得它们的积 Q_1 满足

$$PAQ_1 = \begin{pmatrix}
1 & * & \cdots & * & * & * & \cdots & * & * & *\cdots* \\
0 & 1 & \cdots & * & * & * & \cdots & * & * & *\cdots* \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * & * & *\cdots* \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\cdots0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\cdots0
\end{pmatrix},$$

进而存在若干个 n 阶第一类初等矩阵, 使得它们的积 Q_2

满足

$$PAQ_1Q_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 0 \cdots 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 0 \cdots 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 0 \cdots 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 0 \cdots 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 0 \cdots 0 \end{pmatrix}.$$

再令 $Q = Q_1Q_2$ 即可, 这是因为初等矩阵之积必然可逆. 根据第二章第五讲推论 6.27, $\text{rank}(A) = r$. $\square$

第二章第五讲定理 8.2 的证明. 设 $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$. 如果 $A \sim_e B$, 则存在可逆矩阵 $P \in \mathrm{M}_m(\mathbb{R})$ 和 $Q \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ 使得 $A = PBQ$. 则第二章第五讲推论 6.27 蕴含 $\text{rank}(A) = \text{rank}(B)$.

反之, 设 $\text{rank}(A) = \text{rank}(B)$. 记为 r. 根据引理 8.5,

$$A \sim_e \begin{pmatrix} E_r & O_{r\times(n-r)} \\ O_{(m-r)\times r} & O_{(m-r)\times(n-r)} \end{pmatrix}, \ B \sim_e \begin{pmatrix} E_r & O_{r\times(n-r)} \\ O_{(m-r)\times r} & O_{(m-r)\times(n-r)} \end{pmatrix}.$$

根据传递性, 我们有 $A \sim_e B$. $\square$

注解 8.6 *由上述证明过程可知, PA 是阶梯型.*

推论 8.7 *商集 $\mathbb{R}^{m\times n}/\sim_e$ 共有 $\min(m,n)+1$ 个元素. 它们*

的等价类是

$$\begin{pmatrix} E_r & O_{r\times(n-r)} \\ O_{(m-r)\times r} & O_{(m-r)\times(n-r)} \end{pmatrix},$$

$r = 0, 1, \ldots, \min(m, n)$.

证明. 根据第二章第三次讲义例 3.10, 任何 $m \times n$ 的矩阵的秩都不大于 $\min(m, n)$. 于是, 第二章第五讲定理 8.2 蕴含推论. □

推论 8.8 *可逆矩阵是初等矩阵之积.*

证明. 设 $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ 可逆. 则 $\mathrm{rank}(A) = n$ (第二章第五讲定理 7.14). 根据第二章第五讲定理 8.2, 存在可逆矩阵 $P, Q \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, 其中 P 和 Q 都是初等矩阵的乘积, 使得

$$PAQ = E \implies A = P^{-1}Q^{-1}.$$

因为初等矩阵的逆仍是初等矩阵, 所以 $P^{-1}Q^{-1}$ 也是初等矩阵之积(第二章第五讲命题 7.19 (i)). □

9 矩阵求逆

引理 9.1 设 $A \in \mathbb{R}^{m\times s}, B \in \mathbb{R}^{s\times n}$. 设

$$B = (B_1, \ldots, B_k),$$

其中 $B_\ell \in \mathbb{R}^{s\times n_\ell}$, $\ell = 1,\dots,k$. 则

$$AB = (AB_1,\dots,AB_k).$$

证明. 由列向量乘积公式(第二章第四讲注解 6.17 (ii))

$$AB = (A\vec{B}^{(1)},\dots,A\vec{B}^{(n)}).$$

故

$$AB = \left(\underbrace{A\left(\vec{B}^{(1)},\dots,\vec{B}^{(n_1)}\right)}_{B_1},\dots,\underbrace{A\left(\vec{B}^{(n_1+\cdots+n_{k-1}+1)},\dots,\vec{B}^{(n)}\right)}_{B_k} \right). \quad \square$$

命题 9.2 设 $A\in\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ 可逆, $B = (A, E_n)\in\mathbb{R}^{n\times 2n}$, $P\in\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. 如果 $PB = (E_n|Q)$, 则 $P = Q = A^{-1}$.

证明. 由上述引理可知, $PB{=}P(A, E_n){=}(PA, P)$. 于是, $PA{=}E_n$ 和 $P{=}Q$. 根据第二章第五讲命题 7.18, $P{=}A^{-1}$. $\square$

设 A 可逆. 则 A^{-1} 是若干初等矩阵 $C_1,\dots,C_k$ 之积(推论 8.8). 由上述命题可知:

$$(C_1\cdots C_k)(A|E_n) = (E_n|A^{-1}).$$

于是, 对 $(A|E_n)$ 做初等行变换必然可以把它的前 n 列组成的子矩阵化为单位矩阵, 后 n 列组成的子矩阵就是 A^{-1}.

例 9.3 设

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

计算 A^{-1}.

解. 我们计算

$$
\begin{aligned}
(A|E) &\xrightarrow{F_{1,2}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \\
&\xrightarrow{F_{3,1}(-2)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \\
&\xrightarrow{F_{2}(\frac{1}{2})} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \\
&\xrightarrow{F_{3,2}(1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -2 & 1 \end{array}\right) \\
&\xrightarrow{F_{1,2}(-1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -2 & 1 \end{array}\right) \\
&\xrightarrow{F_{1,3}(1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -2 & 1 \end{array}\right).
\end{aligned}
$$

于是,

$$A^{-1} = F_{1,3}(1)F_{1,2}(-1)F_{3,2}(1)F_2(\frac{1}{2})F_{3,1}(-2)F_{1,2}.$$

另一种常见的矩阵求逆的的方法如下: 设 $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. 设 k 是最小的正整数使得 $A^0, A^1, \ldots, A^k$ 在 $\mathbb{R}$ 上"线性相关". 即存在 $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ 且 $\alpha_k \neq 0$ 使得

$$\alpha_k A^k + \cdots + \alpha_1 A + \alpha_0 E = O. \tag{4}$$

我们有下述结论:

命题 9.4 利用以上记号, 则 A 可逆当且仅当 $\alpha_0 \neq 0$. 此时

$$A^{-1} = -\alpha_0^{-1}(\alpha_1 E + \cdots + \alpha_k A^{k-1}).$$

证明. 设 $\alpha_0 \neq 0$. 由 (4) 可知,

$$A(\alpha_1 E + \cdots + \alpha_k A^{k-1}) = -\alpha_0 E \Longrightarrow A \underbrace{(-\alpha_0^{-1})(\alpha_1 E + \cdots + \alpha_k A^{k-1})}_{B} = E.$$

于是, A 可逆且 $B = A^{-1}$ (第二章第五讲命题 7.18).

反之, 设 A 可逆. 假设 $\alpha_0 = 0$. 则

$$A(\alpha_k A^{k-1} + \cdots + \alpha_2 A + \alpha_1 E) = O.$$

两侧同乘 A^{-1} 得到

$$\alpha_k A^{k-1} + \cdots + \alpha_2 A + \alpha_1 E = O.$$

因为 $\alpha_k \neq 0$, 我们得到与 k 的极小性相矛盾的结果. □

例 9.5 设

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

确定 A_n 是否可逆并当可逆时计算 A_n^{-1}.

解. 注意到 E_n 和 A_n 在 $\mathbb{R}$ 上"线性无关". 计算

$$\begin{aligned} A_n^2 &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} n & n-4 & n-4 & \cdots & n-4 & n-4 \\ n-4 & n & n-4 & \cdots & n-4 & n-4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n-4 & n-4 & n-4 & \cdots & n & n-4 \\ n-4 & n-4 & n-4 & \cdots & n-4 & n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (2n-4)-(n-4) & n-4 & \cdots & n-4 \\ n-4 & (2n-4)-(n-4) & \cdots & n-4 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n-4 & n-4 & \cdots & (2n-4)-(n-4) \end{pmatrix} \\ &= (2n-4)E_n - (n-4)A_n. \end{aligned}$$

我们得到 $A_n^2 + (n-4)A_n - (2n-4)E_n = O$. 由命题 9.4 可

知, A_2 不可逆且 $n \neq 2$ 时, A_n 可逆. 此时,

$$A_n^{-1} = \frac{1}{2n-4}(A_n + (n-4)E_n).$$

10 矩阵分块

10.1 基本公式

引理 10.1 设 $A \in \mathbb{R}^{m\times s}$ 和 $B \in \mathbb{R}^{s\times n}$. 令

$$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_p \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_1, \ldots, B_q \end{pmatrix}.$$

则 $AB = (A_k B_\ell)_{p\times q}$.

证明. 断言:

$$AB = \begin{pmatrix} A_1 B \\ \vdots \\ A_p B \end{pmatrix}.$$

断言的证明. 根据引理 9.1. 我们计算

$$(AB)^t = B^t A^t = B^t (A_1^t, \ldots, A_p^t) = (B^t A_1^t, \ldots, B^t A_p^t).$$

于是,

$$AB = (B^t A_1^t, \ldots, B^t A_p^t)^t = \begin{pmatrix} (B^t A_1^t)^t \\ \vdots \\ (B^t A_p^t)^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 B \\ \vdots \\ A_p B \end{pmatrix}.$$

断言成立.

由此和引理 9.1 可知,

$$AB=\begin{pmatrix}A_1B\\ \vdots\\ A_pB\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_1(B_1,\dots,B_q)\\ \vdots\\ A_p(B_1,\dots,B_q)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_1B_1 & \dots & A_1B_q\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ A_pB_1 & \dots & A_pB_q\end{pmatrix}. \quad \square$$

引理 10.2 设 $A\in\mathbb{R}^{m\times s}$ 和 $B\in\mathbb{R}^{s\times n}$. 令

$$A=(A_1,\dots,A_k),\quad B=\begin{pmatrix}B_1\\ \vdots\\ B_k\end{pmatrix},$$

其中 $A_i\in\mathbb{R}^{m\times s_i}$, $B_i\in\mathbb{R}^{s_i\times n}$, $i=1,2,\dots,k$. 则

$$AB=A_1B_1+\cdots+A_kB_k.$$

证明. 设 $A=(a_{i,\ell})_{m\times s}$ 和 $B=(b_{\ell,j})_{s\times n}$.

先考虑 $k=2$ 的情形. 令

$$C=(c_{i,j})_{m\times n}=AB \quad 和 \quad D=(d_{i,j})_{m\times n}=A_1B_1+A_2B_2.$$

则对任意 $i\in\{1,\dots,m\}, j\in\{1,\dots,n\}$,

$$d_{i,j}=\sum_{\ell=1}^{s_1}a_{i,\ell}b_{\ell,j}+\sum_{\ell=s_1+1}^{s_1+s_2}a_{i,\ell}b_{\ell,j}=\sum_{\ell=1}^{s}a_{i,\ell}b_{\ell,j}=c_{i,j}.$$

结论成立.

设 $k>2$ 且结论对 $k-1$ 成立. 记

$$\tilde{A}=(A_1,\ldots,A_{k-1}),\quad \tilde{B}=\begin{pmatrix}B_1\\ \vdots\\ B_{k-1}\end{pmatrix}.$$

则 $\tilde{A}\in\mathbb{R}^{m\times(s-s_n)}$, $\tilde{B}\in\mathbb{R}^{(s-s_n)\times n}$. 于是

$$AB=\tilde{A}\tilde{B}+A_kB_k=A_1B_1+\cdots+A_{k-1}B_{k-1}+A_kB_k,$$

其中第一个等式来自 $k=2$ 时的结论, 第二个等式来自归纳假设. □

定理 10.3 设 $A\in\mathbb{R}^{m\times s}$ 和 $B\in\mathbb{R}^{s\times n}$. 令

$$A=\begin{pmatrix}A_{1.1}&\cdots&A_{1,k}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ A_{\ell,1}&\cdots&A_{\ell,k}\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}B_{1,1}&\cdots&B_{1,p}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ B_{k,1}&\cdots&B_{k,p}\end{pmatrix},$$

其中 $A_{i,q}\in\mathbb{R}^{m_i\times s_q}$, $B_{q,j}\in\mathbb{R}^{s_q\times n_j}$, $i=1,2,\ldots,\ell$, $j=1,2,\ldots,p$, $q=1,\ldots,k$. 则

$$AB=\left(\sum_{q=1}^{k}A_{i,q}B_{q,j}\right)_{1\le i\le\ell,1\le j\le p}.$$

证明. 设

$$A_i=\Big(A_{i,1},\ldots,A_{i,k}\Big),\ i=1,\ldots,\ell,\quad B_j=\begin{pmatrix}B_{1,j}\\ \vdots\\ B_{k,j}\end{pmatrix},\ j=1,\ldots,p.$$

根据引理 10.1,

$$AB = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_\ell \end{pmatrix} (B_1, \ldots, B_p) = (A_i B_j)_{1 \le i \le \ell, 1 \le j \le p}.$$

根据引理 10.2,

$$A_i B_j = \left(A_{i,1}, \ldots, A_{i,k}\right) \begin{pmatrix} B_{1,j} \\ \vdots \\ B_{k,j} \end{pmatrix} = \sum_{q=1}^{k} A_{i,q} B_{q,j}. \quad \square$$

例 10.4 设分块对角矩阵

$$A = \begin{pmatrix} D_1 & O & \cdots & O \\ O & D_2 & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \cdots & D_k \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}),$$

其中 $D_i \in \mathrm{M}_{n_i}(\mathbb{R})$, $i = 1, 2, \ldots, k$. 则对任意 $m \in \mathbb{Z}^+$,

$$A^m = \begin{pmatrix} D_1^m & O & \cdots & O \\ O & D_2^m & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \cdots & D_k^m \end{pmatrix}.$$

例 10.5 设分块对角矩阵

$$P = \begin{pmatrix} M & O \\ O & N \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_m(\mathbb{R}),$$

其中 $M \in \mathrm{M}_p(\mathbb{R}), N \in \mathrm{M}_q(\mathbb{R})$, $p+q=m$. 设

$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n},$$

其中 $A_{1,1}$ 有 p 行, $A_{2,2}$ 有 q 行. 则

$$PA = \begin{pmatrix} MA_{1,1} & MA_{1,2} \\ NA_{2,1} & NA_{2,2} \end{pmatrix}.$$

类似地, 设

$$Q = \begin{pmatrix} S & O \\ O & T \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}),$$

其中 S 的行数与 $A_{1,1}$ 的列数相同, T 的行数与 $A_{2,2}$ 的列数相同. 则

$$AQ = \begin{pmatrix} A_{1,1}S & A_{1,2}T \\ A_{2,1}S & A_{2,2}T \end{pmatrix}.$$