# 第二章　矩阵

**命题 5.6** 设 $\phi: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ 是线性映射.

*(i)* 如果 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$ 线性相关, 则 $\phi(\mathbf{v}_1), \ldots, \phi(\mathbf{v}_k)$ 也线性相关.

*(ii)* 如果 $U$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间, 则 $\phi(U)$ 是 $\mathbb{R}^m$ 的子空间. 特别地, $\mathrm{im}(\phi)$ 是 $\mathbb{R}^m$ 的子空间.

*(iii)* 如果 $W$ 是 $\mathbb{R}^m$ 的子空间, 则 $\phi^{-1}(W)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间. 特别地, $\phi^{-1}(\{\mathbf{0}_m\})$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间.

*证明.* (i) 设 $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$, 不全为零, 使得 $\sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0}_n$. 根据上一章命题 5.3,

$$\mathbf{0}_m = \phi(\mathbf{0}_n) = \phi\left(\sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbf{v}_i\right) = \sum_{i=1}^k \alpha_i \phi(\mathbf{v}_i).$$

(ii) 设 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \phi(U)$. 则存在 $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in U$ 使得 $\phi(\mathbf{u}) = \mathbf{x}$ 和 $\phi(\mathbf{v}) = \mathbf{y}$. 对任意 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y} &= \alpha\phi(\mathbf{u}) + \beta\phi(\mathbf{v}) \\ &= \phi(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) \quad (\text{上一章命题 } 5.3) \\ &\in \phi(U). \end{aligned}$$

根据第二章第一讲命题 1.16, $\phi(U)$ 是子空间.

(iii) 对任意 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \phi^{-1}(W), \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, 我们计算

$$\phi(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) = \alpha\phi(\mathbf{x}) + \beta\phi(\mathbf{y}).$$

因为 $\phi(\mathbf{x}), \phi(\mathbf{y}) \in W$ 且 $W$ 是子空间, 所以 $\alpha\phi(\mathbf{x}) + \beta\phi(\mathbf{y}) \in W$. 由此得出 $\phi(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) \in W$. 从而, $\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y} \in \phi^{-1}(W)$. □

**定义 5.7** 设 $\phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ 是线性映射. 子空间 $\phi^{-1}(\{\mathbf{0}_m\})$ 称为 $\phi$ 的核 *(kernel)*, 记为 $\ker(\phi)$.

**命题 5.8** 设 $\phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ 是线性映射. 则 $\phi$ 是单射当且仅当 $\ker(\phi) = \{\mathbf{0}_n\}$.

证明. 设 $\phi$ 是单射. 根据上一章命题 5.3, $\phi(\mathbf{0}_n) = \mathbf{0}_m$. 因为 $\phi$ 是单射, 所以 $\ker(\phi) = \{\mathbf{0}_n\}$. 反之, 设 $\ker(\phi) = \{\mathbf{0}_n\}$. 设 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ 使得 $\phi(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{y})$. 则

$$\phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \phi(\mathbf{x}) - \phi(\mathbf{y}) = \mathbf{0}_m.$$

于是, $\mathbf{x} - \mathbf{y} \in \ker(\phi)$. 因为 $\ker(\phi) = \{\mathbf{0}_n\}$, 所以 $\mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{0}$. 故 $\mathbf{x} = \mathbf{y}$, 即 $\phi$ 是单射. □

## 5.2 与基底和维数有关的性质

**定理 5.9** 设 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一组基, $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n$ 是 $\mathbb{R}^m$ 中的任意给定的向量. 则存在唯一的线性映射 $\phi$ 使得 $\phi(\mathbf{v}_j) = \mathbf{w}_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

证明. 定义

$$\begin{array}{rccl} \phi: & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ & \sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbf{v}_j & \mapsto & \sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbf{w}_j, \quad \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R} \end{array}.$$

因为 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ 是基底, 所以对任意 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, 存在唯一的 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ 使得 $\mathbf{x} = \sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbf{v}_j$. 于是, $\phi$ 是良定义的. 显然 $\phi(\mathbf{v}_j) = \mathbf{w}_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

下面验证 $\phi$ 是线性的. 设

$$\mathbf{x} = \sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbf{v}_j,\ \mathbf{y} = \sum_{j=1}^n \beta_j \mathbf{v}_j,\ \alpha_j, \beta_j \in \mathbb{R}.$$

则

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{x} + \mathbf{y}) &= \phi\left(\sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbf{v}_j + \sum_{j=1}^n \beta_j \mathbf{v}_j\right) \\ &= \phi\left(\sum_{j=1}^n (\alpha_j + \beta_j) \mathbf{v}_j\right) \\ &= \sum_{j=1}^n (\alpha_j + \beta_j) \mathbf{w}_j \quad (\phi \text{ 的定义}) \\ &= \sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbf{w}_j + \sum_{j=1}^n \beta_j \mathbf{w}_j \\ &= \phi(\mathbf{x}) + \phi(\mathbf{y}) \quad (\phi \text{ 的定义}). \end{aligned}$$

设 $\lambda \in \mathbb{R}$. 则

$$\begin{aligned}\phi(\lambda\mathbf{x}) &= \phi\left(\sum_{j=1}^{n}(\lambda\alpha_j)\mathbf{v}_j\right)\\ &= \sum_{j=1}^{n}(\lambda\alpha_j)\mathbf{w}_j \quad (\phi\text{ 的定义})\\ &= \lambda\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\mathbf{w}_j\\ &= \lambda\phi(\mathbf{x}) \quad (\phi\text{ 的定义}).\end{aligned}$$

最后, 我们来验证唯一性. 设 $\psi : \mathbb{R}^n :\longrightarrow \mathbb{R}^m$ 是线性映射满足 $\psi(\mathbf{v}_j) = \mathbf{w}_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$. 则

$$\psi(\mathbf{x}) = \psi\left(\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\mathbf{v}_j\right) = \sum_{j=1}^{n}\alpha_j\psi(\mathbf{v}_j) = \sum_{j=1}^{n}\alpha_j\mathbf{w}_j = \phi(\mathbf{x}).$$

故 $\psi = \phi$. $\square$

**例 5.10** 设 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ 是 $\mathbb{R}^2$ 的标准基, 且 $\theta \in [0, 2\pi)$. 设 $R_\theta : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ 的线性映射满足

$$R_\theta(\mathbf{e}_1) = \cos(\theta)\mathbf{e}_1 + \sin(\theta)\mathbf{e}_2,\ R_\theta(\mathbf{e}_2) = -\sin(\theta)\mathbf{e}_1 + \cos(\theta)\mathbf{e}_2.$$

我们称 $R_\theta$ 是 $\mathbb{R}^2$ 上的旋转 *(rotation)*.

**例 5.11** 设 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的标准基. 设 $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ 是满足 $f(\mathbf{e}_j) = \lambda_j, j = 1, 2, \ldots, n$ 的线性映

射. 则对任意 $\mathbf{x}=x_1\mathbf{e}_1+\cdots+x_n\mathbf{e}_n\in\mathbb{R}^n$,

$$f(\mathbf{x})=\lambda_1 x_1+\cdots+\lambda_n x_n.$$

称 $f$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的线性函数.

**例 5.12** 设 $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$, $\phi_A:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^m$ 是满足 $\phi_A(\mathbf{e}_j)=\vec{A}^{(j)}$, $j=1,2,\ldots,n$. 则对任意 $\mathbf{x}=x_1\mathbf{e}_1+\cdots+x_n\mathbf{e}_n\in\mathbb{R}^n$,

$$\phi_A(\mathbf{x})=x_1\vec{A}^{(1)}+\cdots+x_n\vec{A}^{(n)}.$$

称 $\phi_A$ 是由 $A$ 诱导的线性映射.

设 $H$ 是以 $A$ 为系数矩阵的齐次线性方程程组, $\mathbf{b}\in\mathbb{R}^m$ 且 $L$ 是以 $B=(A|\mathbf{b})$ 为增广矩阵的线性方程组. 则

$$\ker(\phi_A)=\mathrm{sol}(H)\quad\text{且}\quad L\text{ 相容}\iff\mathbf{b}\in\mathrm{im}(\phi).$$

**引理 5.13** 设 $\phi:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^m$ 是线性映射, $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_d$ 是 $\ker(\phi)$ 的一组基.

*(i)* 如果 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_d,\mathbf{v}_{d+1},\ldots,\mathbf{v}_{d+k}$ 线性无关, 则 $\phi(\mathbf{v}_{d+1})$, $\ldots$, $\phi(\mathbf{v}_{d+k})$ 线性无关;

*(ii)* 如果 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_d,\mathbf{v}_{d+1},\ldots,\mathbf{v}_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一组基, 则 $\phi(\mathbf{v}_{d+1})$, $\ldots$, $\phi(\mathbf{v}_n)$ 是 $\mathrm{im}(\phi)$ 的一组基.

证明. (i) 设 $\alpha_{d+1},\ldots,\alpha_{d+k}\in\mathbb{R}$ 使得 $\alpha_{d+1}\phi(\mathbf{v}_{d+1})+\cdots+\alpha_{d+k}\phi(\mathbf{v}_{d+k})=\mathbf{0}_m$. 则 $\phi(\alpha_{d+1}\mathbf{v}_{d+1}+\cdots+\alpha_{d+k}\mathbf{v}_{d+k})=\mathbf{0}_m$.

由此可知,

$$\alpha_{d+1}\mathbf{v}_{d+1}+\cdots+\alpha_{d+k}\mathbf{v}_{d+k}\in\ker(\phi).$$

故存在 $\alpha_1,\ldots,\alpha_d\in\mathbb{R}$ 使得

$$\alpha_{d+1}\mathbf{v}_{d+1}+\cdots+\alpha_{d+k}\mathbf{v}_{d+k}=\alpha_1\mathbf{v}_1+\cdots+\alpha_d\mathbf{v}_d.$$

因为 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_d,\ \mathbf{v}_{d+1},\ldots,\mathbf{v}_{d+k}$ 是线性无关, 所以 $\alpha_{d+1}=\cdots=\alpha_{d+k}=0$. 故 $\phi(\mathbf{v}_{d+1}),\ldots,\phi(\mathbf{v}_{d+k})$ 线性无关.

(ii) 由 (i) 可知, $\phi(\mathbf{v}_{d+1}),\ldots,\phi(\mathbf{v}_n)$ 线性无关. 他们显然在 $\mathrm{im}(\phi)$ 中. 我们只要证明 $\mathrm{im}(\phi)$ 中的任意向量都是它们的线性组合即可. 设 $\mathbf{y}\in\mathrm{im}(\phi)$. 则存在 $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$ 使得 $\mathbf{y}=\phi(\mathbf{x})$. 因为 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一组基, 所以存在 $\beta_1,\ldots,\beta_n\in\mathbb{R}$ 使得

$$\mathbf{x}=\beta_1\mathbf{v}_1+\cdots+\beta_d\mathbf{v}_d+\beta_{d+1}\mathbf{v}_{d+1}+\cdots+\beta_n\mathbf{v}_n.$$

故

$$\begin{aligned}
\mathbf{y} = \phi(\mathbf{x}) = \phi\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i \mathbf{v}_i\right) \quad &(\text{定义}) \\
= \phi\left(\sum_{i=1}^{d} \beta_i \mathbf{v}_i\right) + \phi\left(\sum_{j=d+1}^{n} \beta_j \mathbf{v}_j\right) \quad &(\phi\text{ 线性}) \\
= \phi\left(\sum_{j=d+1}^{n} \beta_j \mathbf{v}_j\right) \quad &(\sum_{i=1}^{d} \beta_i \mathbf{v}_i \in \ker(\phi)) \\
= \sum_{j=d+1}^{n} \beta_j \phi(\mathbf{v}_j) \quad &(\phi\text{ 线性}). \quad \square
\end{aligned}$$

**定理 5.14** *(对偶定理, 线性映射版)* 设 $\phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ 是线性映射. 则

$$\dim(\ker(\phi)) + \dim(\operatorname{im}(\phi)) = n.$$

证明. 设 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_d$ 是 $\ker(\phi)$ 的一组基. 由基扩充定理 (第二章第二讲定理 2.11), $\mathbb{R}^n$ 有一组基 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_d, \mathbf{v}_{d+1}, \ldots, \mathbf{v}_n$. 由引理 5.13 (ii), $\phi(\mathbf{v}_{d+1}), \ldots, \phi(\mathbf{v}_n)$ 是 $\operatorname{im}(\phi)$ 的一组基. 于是, $\dim(\operatorname{im}(\phi)) = n - d$. $\square$

**推论 5.15** 设 $\phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ 是线性映射. 则 $\phi$ 是单射当且仅当它是满射.

证明. 如果 $\phi$ 是单射, 则 $\dim(\ker(\phi)) = 0$. 由上述定理可知 $\dim(\operatorname{im}(\phi)) = n$. 又因为 $\operatorname{im}(\phi) \subset \mathbb{R}^n$, 所以 $\operatorname{im}(\phi) = \mathbb{R}^n$ (第

二章第二讲命题 2.13). 即 $\phi$ 是满射. 反之, 如果 $\phi$ 是满射, 则 $\dim(\mathrm{im}(\phi)) = n$. 由上述定理可知, $\dim(\ker(\phi)) = 0$. 在根据命题 5.8, $\phi$ 是单射. □

**例 5.16** *利用定理 5.14 证明对偶定定理的方程版.*

*证明.* 设 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $H$ 是以 $A$ 为系数矩阵的 $n$ 元齐次线性方程组, $\phi_A$ 是由 $A$ 诱导的从 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^m$ 的线性映射. 由例 *5.12* 可知, $\mathrm{im}(\phi_A) = V_c(A)$ 和 $\ker(\phi_A) = \mathrm{sol}(H)$. 故定理 *5.14* 蕴含对偶定理的方程版.

**命题 5.17** *设 $\phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ 是线性映射, $U$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间, $W$ 是 $\mathbb{R}^m$ 的子空间.*

*(i)* $\dim(U) \geq \dim(\phi(U))$;

*(ii)* 当 $\phi$ 是满射时, $\dim(\phi^{-1}(W)) \geq \dim(W)$.

*证明.* (i) 设 $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_d$ 是 $U$ 的一组基. 则

$$\phi(U) = \langle \phi(\mathbf{u}_1), \ldots, \phi(\mathbf{u}_d) \rangle.$$

根据第二章第二讲推论 2.9, $\dim(\phi(U)) \leq d$.

(ii) 设 $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_d$ 是 $W$ 的一组基. 因为 $\phi$ 是满射, 存在 $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_d \in \mathbb{R}^n$, 使得 $\phi(\mathbf{u}_1) = \mathbf{w}_1$, $\ldots$, $\phi(\mathbf{u}_d) = \mathbf{w}_d$. 根据第二章地三讲命题 5.6 (i), $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_d$ 线性无关. 显然,

$\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_d \in \phi^{-1}(W)$. 根据基扩充定理(第二章第二讲定理 2.11), $\phi^{-1}(W)$ 有包含 $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_d$ 的基. 故

$$\dim(\phi^{-1}(W)) \geq \dim(W). \quad \square$$

# 6 矩阵的运算

在本节中, 设 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$; $\boldsymbol{\epsilon}_1, \ldots, \boldsymbol{\epsilon}_m$ 分别是 $\mathbb{R}^n$ 和 $\mathbb{R}^m$ 的标准基.

## 6.1 线性映射在标准基下的矩阵表示

考虑线性映射 $\phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$. 对 $j = 1, 2, \ldots, n$, 设

$$\phi(\mathbf{e}_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{i,j} \boldsymbol{\epsilon}_i.$$

根据第二章第三讲定理 5.9, $\phi$ 由矩阵

$$A = (\phi(\mathbf{e}_1), \ldots, \phi(\mathbf{e}_n)) = (a_{i,j})_{m \times n}$$

唯一确定. 我们称 $A$ 是线性映射 $\phi$ 在标准基下的矩阵的表示, 简称 $\phi$ 的矩阵. 记为 $A_\phi$.

设 $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^t$. 则

$$\begin{aligned}
\phi(\mathbf{x}) &= \phi\left(\sum_{j=1}^{n} x_j \mathbf{e}_j\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} x_j \phi(\mathbf{e}_j) \\
&= \sum_{j=1}^{n} x_j \vec{A}^{(j)} \quad \text{(向量版的公式)} \\
&= \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1,j} x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{m,j} x_j \end{pmatrix} \quad \text{(坐标版的公式)}
\end{aligned}$$

**例 6.1** 设 $\phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ 是零映射, 即 $\phi(\mathbf{e}_j) = \mathbf{0}_m$, $j = 1, 2, \ldots, n$. 则

$$A_\phi = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{m\times n}.$$

称之为 $m \times n$ 阶零矩阵, 记为 $O_{m\times n}$. 当 $m = n$ 时, 简称为 $n$ 阶零方阵, 记为 $O_n$ 或 $O$.

**例 6.2** 设 $\phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ 是数乘映射, 即 $\phi(\mathbf{e}_j) = \lambda\mathbf{e}_j$,

$j=1,2,\ldots,n$, 其中 $\lambda\in\mathbb{R}$. 则

$$A_\phi=\begin{pmatrix}\lambda & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda\end{pmatrix}.$$

称之为 $n$ 阶数乘*(方)*阵, 有时记为 $\mathrm{diag}_n(\lambda)$. 记 $\mathrm{diag}_n(1)$ 为 $E_n$. 称为 $n$ 阶单位方阵. 它对应的线性映射是恒同映射.

**例 6.3** 设 $f:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ 是线性函数, $f(\mathbf{e}_1){=}\alpha_1,\ldots,f(\mathbf{e}_n){=}\alpha_n$. 则 $A_f=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$. 设 $\mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_n)^t$. 则

$$f(\mathbf{x})=\alpha_1x_1+\cdots+\alpha_nx_n.$$

**例 6.4** 设 $T_\theta:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^2$ 是旋转, 即

$$T_\theta(\mathbf{e}_1)=\cos(\theta)\mathbf{e}_1{+}\sin(\theta)\mathbf{e}_2 \quad 和 \quad T_\theta(\mathbf{e}_2)=-\sin(\theta)\mathbf{e}_1{+}\cos(\theta)\mathbf{e}_2.$$

则 $T_\theta$ 的矩阵是

$$\begin{pmatrix}\cos(\theta) & -\sin(\theta)\\ \sin(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix}.$$

于是

$$T_\theta\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}\cos(\theta)\\ \sin(\theta)\end{pmatrix}{+}y\begin{pmatrix}-\sin(\theta)\\ \cos(\theta)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos(\theta)x-\sin(\theta)y\\ \sin(\theta)x+\cos(\theta)y\end{pmatrix}.$$

**定理 6.5** 设 $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ 是从 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^m$ 的线性映射的集合. 定义

$$\begin{array}{rccc}\Phi: & \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m) & \longrightarrow & \mathbb{R}^{m\times n} \\ & \phi & \mapsto & A_\phi\end{array}.$$

则 $\Phi$ 是双射且其逆是

$$\begin{array}{rccc}\Psi: & \mathbb{R}^{m\times n} & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m) \\ & A & \mapsto & \phi_A\end{array}.$$

证明. 设 $\phi\in\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$. $\Psi\circ\Phi(\phi)=\Psi(A_\phi)$. 注意到

$$\Psi(A_\phi)(\mathbf{e}_j)=\vec{A}_\phi^{(j)}=\phi(\mathbf{e}_j),\quad j=1,2,\ldots,n.$$

根据第二章第三讲定理 5.9，$\Psi(A_\phi)=\phi$. 于是,

$$\Psi\circ\Phi=\mathrm{id}_{\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)}.$$

设 $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$. 则 $\Phi\circ\Psi(A)=\Phi(\phi_A)$. 注意到矩阵 $\Phi(\phi_A)$ 的第 $j$ 列是 $\phi_A(\mathbf{e}_j)=\vec{A}^{(j)}$, $j=1,2,\ldots,n$. 于是, $\Phi(\phi_A)=A$. 由此可知 $\Phi\circ\Psi=\mathrm{id}_{\mathbb{R}^{m\times n}}$. □

下面的命题是用矩阵来描述线性映射.

**命题 6.6** 设 $\phi:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^m$ 是线性映射, 它在标准基下的矩阵是 $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$.

*(i)* $\mathrm{im}(\phi)=V_c(A)$, 从而 $\dim(\mathrm{im}(\phi))=\mathrm{rank}(A)$. 特别地, $\phi$ 是满射当且仅当 $A$ 行满秩.

*(ii)* $\ker(\phi)$ 是 $A$ 对应的齐次线性方程组的解空间, 从而 $\dim(\ker(\phi)) = n - \operatorname{rank}(A)$. 特别地, $\phi$ 是单射当且仅当 $A$ 列满秩.

*(iii)* $\phi$ 是双射当且仅当 $m = n$ 且 $A$ 满秩.

证明. 根据定理 6.5, $\phi = \phi_A$.

(i) 由第二章第三讲例 5.12 可知, $\operatorname{im}(\phi) = V_c(A)$. 故

$$\dim(V_c(A)) = \operatorname{rank}(A).$$

注意到 $\phi$ 满当且仅当 $V_c(A) = \mathbb{R}^m$, 即 $V_c(A) = \mathbb{R}^m$ 当且仅当 $\dim V_c(A) = m$.

(ii) 由第二章第三讲例 5.12 可知, $\ker(\phi)$ 是 $A$ 对应的齐次线性方程组的解空间. 根据对偶定理和 (i), 我们有

$$\dim(\ker(\phi)) = n - \operatorname{rank}(A).$$

根据第二章第三讲命题 5.8, $\phi$ 单当且仅当 $\ker(\phi) = \{\mathbf{0}_n\}$, 即上述解空间是 $\mathbf{0}_n$. 根据第二章第三讲引理 4.2, $\operatorname{rank}(A)=n$.

(iii) 是 (i) 和 (ii) 的直接推论. □

**例 6.7** 设 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_4$ 是 $\mathbb{R}^4$ 的标准基, $\boldsymbol{\epsilon}_1, \boldsymbol{\epsilon}_2, \boldsymbol{\epsilon}_3$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的一

组基. 线性映射 $\phi : \mathbb{R}^4 :\longrightarrow \mathbb{R}^3$ 由

$$\begin{cases} \phi(\mathbf{e}_1) &= 2\boldsymbol{\epsilon}_1 - \boldsymbol{\epsilon}_3 \\ \phi(\mathbf{e}_2) &= \boldsymbol{\epsilon}_2 - \boldsymbol{\epsilon}_3 \\ \phi(\mathbf{e}_3) &= 4\boldsymbol{\epsilon}_1 + \boldsymbol{\epsilon}_2 - 3\boldsymbol{\epsilon}_3 \\ \phi(\mathbf{e}_4) &= 2\boldsymbol{\epsilon}_1 + \boldsymbol{\epsilon}_2 - 2\boldsymbol{\epsilon}_3 \end{cases}$$

计算

*(i)* 计算 $\phi$ 在 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4; \boldsymbol{\epsilon}_1, \boldsymbol{\epsilon}_2, \boldsymbol{\epsilon}_3$ 下的矩阵;

*(ii)* 计算 $\ker(\phi)$ 和 $\mathrm{im}(\phi)$ 的维数;

*(iii)* 分别计算 $\ker(\phi)$ 和 $\mathrm{im}(\phi)$ 的一组基底.

解. *(i)* 由定义可知:

$$A_\phi = (\phi(\mathbf{e}_1), \phi(\mathbf{e}_2), \phi(\mathbf{e}_3), \phi(\mathbf{e}_4)) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -3 & -2 \end{pmatrix}.$$

*(ii)* 利用初等行变换得

$$A_\phi \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

因为 $\mathrm{rank}(A_\phi) = 2$, 所以 $\dim(\mathrm{im}(\phi)) = 2$. 由对偶定理可知, $\dim(\ker(\phi)) = 4 - 2 = 2$.

*(iii)* $\ker(\phi)$ 对应的齐次线性方程组是

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0. \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 + x_2 = -3x_3 - 2x_4 \\ x_2 = -x_3 - x_4. \end{cases}$$

于是, $\ker(\phi)$ 的一组基是

$$\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad 和 \quad \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

像空间 $\mathrm{im}(\phi)$ 的基是 $A_\phi$ 中的极大线性无关组. 因为 $\dim(\mathrm{im}(\phi)) = 2$, 所以取 $A_\phi$ 中任意两个线性无关的列向量即可. 例如 $\mathrm{im}(\phi)$ 的一组基是 $\vec{A}_\phi^{(1)}, \vec{A}_\phi^{(2)}$.

**例 6.8** 利用方程版的对偶定理证明映射版的对偶定理.

证明. 设 $\phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ 是线性映射, 它在标准基下的矩阵是 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. 再设 $H_A$ 是以 $A$ 为系数矩阵的齐次线性方程组. 根据方程版对偶定理*(第二章第三讲定理 4.6)*

$$\dim(\mathrm{sol}(H_A)) + \mathrm{rank}(A) = n.$$

根据命题 *6.6 (i)* 和 *(ii)*,

$$\dim(\ker(\phi)) + \dim(\mathrm{im}(\phi)) = n.$$

即映射版对偶定理*(第二章第三讲定理 5.13)*成立.

## 6.2 线性映射的运算

**定义 6.9** 设 $\phi$ 和 $\psi$ 是从集合 $S$ 到 $\mathbb{R}^m$ 的映射, $\lambda \in \mathbb{R}$. 令:

$$\begin{array}{rccl} \phi+\psi: & S & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ & s & \mapsto & \phi(s)+\psi(s) \end{array} \quad \text{和} \quad \begin{array}{rccl} \lambda\phi: & S & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ & s & \mapsto & \lambda\phi(s). \end{array}$$

分别称为映射的加法与映射的数乘运算.

根据 $\mathbb{R}^m$ 中线性运算的性质, 我们可直接验证映射的加法和数乘满足交换律和结合律且这两个运算满足分配律.

**命题 6.10** *(i)* 设 $\phi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ 是线性映射, $\psi_1,\psi_2:S\to\mathbb{R}^n$ 是映射, $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$. 则

$$\phi\circ(\lambda_1\psi_1+\lambda_2\psi_2)=\lambda_1(\phi\circ\psi_1)+\lambda_2(\phi\circ\psi_2).$$

*(ii)* 设 $\phi_1,\phi_2:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$, $\psi:S\to\mathbb{R}^n$ 是映射, $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$. 则

$$(\lambda_1\phi_1+\lambda_2\phi_2)\circ\psi=\lambda_1(\phi_1\circ\psi)+\lambda_2(\phi_2\circ\psi).$$

证明. (i) 设 $s\in S$. 则

$$\begin{aligned} \phi\circ(\lambda_1\psi_1+\lambda_2\psi_2)(s) &= \phi((\lambda_1\psi_1+\lambda_2\psi_2)(s)) \quad (\text{复合的定义}) \\ &= \phi(\lambda_1\psi_1(s)+\lambda_2\psi_2(s)) \quad (\text{定义 } 6.9) \\ &= \lambda_1\phi\circ\psi_1(s)+\lambda_2\phi\circ\psi_2(s) \quad (\phi \text{ 线性}) \\ &= (\lambda_1\phi\circ\psi_1+\lambda_2\phi\circ\psi_2)(s) \quad (\text{定义 } 6.9). \end{aligned}$$

故 $\phi\circ(\lambda_1\psi_1+\lambda_2\psi_2)=\lambda_1(\phi\circ\psi_1)+\lambda_2(\phi\circ\psi_2)$.

(ii) 设 $s\in S$. 则

$$\begin{aligned}(\lambda_1\phi_1+\lambda_2\phi_2)\circ\psi(s)&=(\lambda_1\phi_1+\lambda_2\phi_2)(\psi(s)) \quad (\text{复合的定义})\\&=\lambda_1\phi_1\circ\psi(s)+\lambda_2\phi_2\circ\psi(s) \quad (\text{定义 } 6.9)\\&=(\lambda_1\phi_1\circ\psi+\lambda_2\phi_2\circ\psi)(s) \quad (\text{定义 } 6.9).\end{aligned}$$

故 $(\lambda_1\phi_1+\lambda_2\phi_2)\circ\psi=\lambda_1(\phi_1\circ\psi)+\lambda_2(\phi_2\circ\psi)$. □

**命题 6.11** 设 $\phi$ 和 $\psi$ 是从 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^m$ 的线性映射, $\lambda\in\mathbb{R}$. 则 $\phi+\psi$ 和 $\lambda\phi$ 也是线性映射.

证明. 设 $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{R}^n$. 我们计算

$$\begin{aligned}(\phi+\psi)(\mathbf{x}+\mathbf{y})&=\phi(\mathbf{x}+\mathbf{y})+\psi(\mathbf{x}+\mathbf{y}) \quad (\text{映射加法的定义})\\&=\phi(\mathbf{x})+\phi(\mathbf{y})+\psi(\mathbf{x})+\psi(\mathbf{y}) \quad (\text{线性映射的定义})\\&=(\phi+\psi)(\mathbf{x})+(\phi+\psi)(\mathbf{y}) \quad (\text{映射加法的定义}).\end{aligned}$$

设 $\alpha\in\mathbb{R}$. 则

$$\begin{aligned}(\phi+\psi)(\alpha\mathbf{x})&=\phi(\alpha\mathbf{x})+\psi(\alpha\mathbf{x}) \quad (\text{映射加法的定义})\\&=\alpha\phi(\mathbf{x})+\alpha\psi(\mathbf{x}) \quad (\text{线性映射的定义})\\&=\alpha(\phi+\psi)(\mathbf{x}) \quad (\text{映射加法的定义}).\end{aligned}$$

于是, $\phi+\psi$ 是线性映射. 类似地,

$$\begin{aligned}(\lambda\phi)(\mathbf{x}+\mathbf{y}) &= \lambda\phi(\mathbf{x}+\mathbf{y}) \quad (\text{映射数乘的定义}) \\ &= \lambda(\phi(\mathbf{x})+\phi(\mathbf{y})) \quad (\text{线性映射的定义}) \\ &= (\lambda\phi)(\mathbf{x})+(\lambda\phi)(\mathbf{y}) \quad (\text{映射数乘的定义}).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\lambda\phi)(\alpha\mathbf{x}) &= \lambda\phi(\alpha\mathbf{x}) \quad (\text{映射数乘的定义}) \\ &= \lambda\alpha\phi(\mathbf{x}) \quad (\text{线性映射的定义}) \\ &= \alpha(\lambda\phi)(\mathbf{x}) \quad (\text{映射数乘的定义}). \quad \square\end{aligned}$$

## 6.3 矩阵的线性运算

设 $\phi,\psi\in\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$, 它们在标准基下的表示分别是 $A=(a_{i,j})_{m\times n}$ 和 $B=(b_{i,j})_{m\times n}$. 则

$$(\phi+\psi)(\mathbf{e}_j)=\phi(\mathbf{e}_j)+\psi(\mathbf{e}_j)=\vec{A}^{(j)}+\vec{B}^{(j)}, \quad j=1,2,\ldots,n.$$

由此我们定义两个矩阵 $A$ 和 $B$ 的和

$$A+B=(\vec{A}^{(1)}+\vec{B}^{(1)},\ldots,\vec{A}^{(n)}+\vec{B}^{(n)}).$$

等价地, $A+B=(a_{i,j}+b_{i,j})_{m\times n}$.

设 $\lambda\in\mathbb{R}$. 则

$$(\lambda\phi)(\mathbf{e}_j)=\lambda\phi(\mathbf{e}_j)=\lambda\vec{A}^{(j)}, \quad j=1,2,\ldots,n.$$

由此我们定义矩阵的数乘

$$\lambda A=(\lambda\vec{A}^{(1)},\ldots,\lambda\vec{A}^{(n)}).$$

等价地, $\lambda A=(\lambda a_{i,j})_{m\times n}$.

由矩阵加法和数乘的定义与定理 6.5 可知：对任意 $\lambda\in\mathbb{R},A,B\in\mathbb{R}^{m\times n}$, 我们有$\phi_A+\phi_B=\phi_{A+B}$ 和$\lambda\phi_A=\phi_{\lambda A}$.

可直接验证矩阵的加法满足交换律和结合律, 且对于任意 $A,B\in\mathbb{R}^{m\times n}$, $A+O_{m\times n}=A$ 和 $A+(-A)=O_{m\times n}$. 进而, 对于任意 $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$, $(\lambda\mu)A=\lambda(\mu A)$. 分配律:

$$\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B\quad 和\quad (\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A.$$

**例 6.12** 设

$$A=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&2&0\end{pmatrix}\quad 和\quad B=\begin{pmatrix}2&1&-3\\2&2&1\end{pmatrix}.$$

计算 $3A-2B$.

解.

$$3A-2B=\begin{pmatrix}3&0&-3\\0&6&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4&2&-6\\4&4&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&-2&3\\-4&2&-2\end{pmatrix}$$

**例 6.13** 设 $A,B\in\mathbb{R}^{m\times n}$. 证明:

$$\operatorname{rank}(A+B)\le\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(B).$$

证明. 因为 $A+B=(\vec{A}^{(1)}+\vec{B}^{(1)},\ldots,\vec{A}^{(n)}+\vec{B}^{(n)})$ 且

$$\vec{A}^{(1)}+\vec{B}^{(1)},\ldots,\vec{A}^{(n)}+\vec{B}^{(n)}\in V_c(A)+V_c(B),$$

所以 $V_c(A+B)\subset V_c(A)+V_c(B)$. 故

$$\dim V_c(A+B)\leq\dim(V_c(A)+V_c(B))\leq\dim V_c(A)+\dim V_c(B),$$

即 $\operatorname{rank}(A+B)\leq\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(B)$.

**推论 6.14** 设 $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ 从 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^m$ 的线性映射的集合. 定义

$$\begin{array}{rccc}\Phi: & \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m) & \longrightarrow & \mathbb{R}^{m\times n} \\ & \phi & \mapsto & A_\phi\end{array}.$$

则 $\Phi$ 是双射且其逆是

$$\begin{array}{rccc}\Psi: & \mathbb{R}^{m\times n} & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m) \\ & A & \mapsto & \phi_A\end{array}.$$

进而, 对任意 $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$, $\phi,\psi\in\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$, $A,B\in\mathbb{R}^{m\times n}$, 我们有:

$$\Phi(\lambda\phi+\mu\psi)=\lambda\Phi(\phi)+\mu\Phi(\psi)$$

和

$$\Psi(\lambda A+\mu B)=\lambda\Psi(A)+\mu\Psi(B).$$

证明. 根据定理 6.5, 我们只要验证 $\Phi$ 保持线性运算. 为此，我们计算

$$
\begin{aligned}
\Phi(\lambda\phi+\mu\psi) &= A_{\lambda\phi+\mu\psi} \quad (\Phi \text{ 的定义}) \\
&= A_{\lambda\phi} + A_{\mu\psi} \quad (\text{矩阵加法的定义}) \\
&= \lambda A_{\phi} + \mu A_{\psi} \quad (\text{矩阵数乘的定义}) \\
&= \lambda\Phi(\phi) + \mu\Phi(\psi) \quad (\Phi \text{ 的定义}).
\end{aligned}
$$

类似地,

$$
\begin{aligned}
\Psi(\lambda A+\mu B) &= \phi_{\lambda A+\mu B} \quad (\Psi \text{ 的定义}) \\
&= \phi_{\lambda A} + \phi_{\mu B} \quad (\text{矩阵加法的定义}) \\
&= \lambda\phi_{A} + \mu\phi_{B} \quad (\text{矩阵数乘的定义}) \\
&= \lambda\Psi(A) + \mu\Phi(B) \quad (\Psi \text{ 的定义}).
\end{aligned}
$$