第二章　矩阵

3　矩阵的秩

3.1　初等行变换下的不变量

计算过程(算法)中不变的量往往反映被计算对象的基本特征. 本小节研究关于矩阵初等行变换下的不变量.

定义 3.1 设 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. 由 A 的行向量 $\vec{A}_1, \ldots, \vec{A}_m$ 在行空间 $\mathbb{R}^{1\times n}$ 中生成的子空间称为 A 的行空间. 记为 $V_r(A)$. 由 A 的列向量 $\vec{A}^{(1)}, \ldots, \vec{A}^{(n)}$ 在列空间 $\mathbb{R}^m$ 中生成的子空间称为 A 的列空间. 记为 $V_c(A)$. 矩阵 A 的行秩是 $\dim(V_r(A))$, 列秩是 $\dim(V_c(A))$.

本节的主要结论是一个矩阵的行秩等于列秩.

引理 3.2 设 $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$, $B\in\mathbb{R}^{m\times n}$ 是通过一次初等行变换得到的. 则 $V_r(A)=V_r(B)$. 特别地, A 和 B 的行秩相同.

证明. 当 B 是由 A 通过一次第一类初等行变换得到的, 则 A 和 B 有共同的行向量. 故 $V_r(A) = V_r(B)$.

当 B 是由 A 通过一次第二类初等行变换得到的, 设 $\vec{A}_k = \vec{B}_k$, $k = 1, \ldots, j-1, j+1, \ldots, m$, 而 $\vec{B}_j = \vec{A}_j + \lambda\vec{A}_i$, 其中 $i \neq j$ 和 $\lambda \in \mathbb{R}$. 则 B 的所有行向量在 $V_r(A)$ 中. 故 $V_r(B) \subset V_r(A)$ (第二章第一讲命题 1.25 (ii)). 因为 $i \neq j$,

所以 $\vec{A}_i = \vec{B}_i$. 故 $\vec{A}_j = \vec{B}_j - \lambda \vec{B}_i$. 由此可知, A 的行向量都在 $V_r(B)$ 中. 同样的命题蕴含 $V_r(A) \subset V_r(B)$.

当 B 是由 A 通过一次第三类初等行变换得到的, 设 $\vec{A}_k = \vec{B}_k$, $k = 1, \ldots, j-1, j+1, \ldots, m$, 而 $\vec{B}_j = \lambda \vec{A}_j$, 其中 $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. 则 B 的所有行向量在 $V_r(A)$ 中. 故 $V_r(B) \subset V_r(A)$ (第二章第一讲命题 1.25 (ii)). 因为 $\lambda \neq 0$, 所以 $\vec{A}_j = \lambda^{-1} \vec{B}_j$. 故 A 的行向量都在 $V_r(B)$ 中. 同样的命题蕴含 $V_r(A) \subset V_r(B)$. $\square$

例 3.3 *第二类初等行变换得:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} =: B.$$

注意到 $V_c(A) \neq V_c(B)$.

一个令人意外得结论是:

引理 3.4 *设 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. 设 $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 是通过一次初等行变换得到的. 则 A 和 B 的列秩相同.*

证明. 设以 A 和 B 为系数矩阵的齐次线性方程组分别是 H_A 和 H_B. 即:

$$H_A: \ \sum_{j=1}^{n} x_j \vec{A}^{(j)} = \mathbf{0}_m \text{ 和 } H_B: \ \sum_{j=1}^{n} x_j \vec{B}^{(j)} = \mathbf{0}_m.$$

则 H_A 和 H_B 等价(第一章第一讲命题 2.2). 不妨设 $\vec{A}^{(1)}$, $\ldots$, $\vec{A}^{(r)}$ 是 A 中列向量的极大线性无关组.

断言. $\vec{B}^{(1)}, \ldots, \vec{B}^{(r)}$ 线性无关.

断言的证明. 设 $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{R}$ 使得

$$\alpha_1 \vec{B}^{(1)} + \cdots + \alpha_r \vec{B}^{(r)} = \mathbf{0}_m.$$

则

$$\alpha_1 \vec{B}^{(1)} + \cdots + \alpha_r \vec{B}^{(r)} + 0\vec{B}^{(r+1)} + \cdots + 0\vec{B}^{(n)} = \mathbf{0}_m.$$

换言之, 列向量

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

是方程组 H_B 的一个解. 故它也是 H_A 的一个解. 即

$$\alpha_1 \vec{A}^{(1)} + \cdots + \alpha_r \vec{A}^{(r)} + 0\vec{A}^{(r+1)} + \cdots + 0\vec{A}^{(n)} = \mathbf{0}_m.$$

我们得到

$$\alpha_1 \vec{A}^{(1)} + \cdots + \alpha_r \vec{A}^{(r)} = \mathbf{0}_m.$$

因为 $\vec{A}^{(1)}$, $\ldots$, $\vec{A}^{(r)}$ 线性无关, 所以 $\alpha_1 = \cdots = \alpha_r = 0$. 于是, $\vec{B}^{(1)}, \ldots, \vec{B}^{(r)}$ 线性无关. 断言成立.

设 $j \in \{r+1, \ldots, n\}$. 则存在 $\beta_1, \ldots, \beta_r \in \mathbb{R}$ 使得 $\vec{A}^{(j)} = \beta_1 \vec{A}^{(1)} + \cdots + \beta_r \vec{A}^{(r)}$. 这是因为 $\vec{A}^{(1)}, \ldots, \vec{A}^{(r)}$ 是 A 中列向量的极大线性无关组. 我们得到

$$\begin{aligned}
&\beta_1 \vec{A}^{(1)} + \cdots + \beta_r \vec{A}^{(r)} \\
&+ 0\vec{A}^{(r+1)} + \cdots + 0\vec{A}^{(j-1)} + (-1)\vec{A}^{(j)} \\
&+ 0\vec{A}^{(j+1)} + \cdots + 0\vec{A}^{(n)} = \mathbf{0}_m.
\end{aligned}$$

换言之, 列向量

$$\begin{array}{r} \\ \\ \\ \\ \\ \\ j \rightarrow \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

是 H_A 的解. 于是, 它也是 H_B 的解. 我们有

$$\vec{B}^{(j)} = \beta_1 \vec{B}^{(1)} + \cdots + \beta_r \vec{B}^{(r)}.$$

再根据断言可知 $\vec{B}^{(1)}, \ldots, \vec{B}^{(r)}$ 是 B 中列向量的极大线性

无关组. 由第六讲推论 2.9 可知,

$$\dim(V_c(A)) = r = \dim(V_c(B)). \quad \square$$

在矩阵中互换两列的位置称为第一类初等列变换, 把一列通乘一个实数加到另一列上称为第二类初等列变换, 把一列通乘一个非零实数称为第三类初等列变换. 它们统称为初等列变换. 类似引理 3.2，我们有

引理 3.5 设 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. 设 $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 是通过一次初等列变换得到的. 则 $V_c(A) = V_c(B)$. 特别地, A 和 B 的列秩相同.

3.2 矩阵的秩

定理 3.6 设 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. 则 A 的行秩等于它的列秩.

证明. 由第一章第一讲命题 2.3 可知, A 可以通过初等行变换化为阶梯型矩阵

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \bullet & * & \cdots & * & * & * & * & \cdots & * & * & * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \bullet & * & * & \cdots & * & * & * & \cdots & * \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \bullet & * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

其中 $\bullet$ 代表非零实数, $*$ 代表实数.

设 B 中有 k 行是非零向量. 注意到这 k 行从左至右第一个非零坐标出现的位置两两不同. 故这 k 行线性无关. 由此得出, 这 k 行是行空间 $V_r(B)$ 的一组基. 我们得到 B 的行秩等于 k.

对 B 做第二类列变换得到

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \bullet & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \bullet & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \bullet & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

注意到 C 中只有 k 列非零, 且这 k 列从上到下第一个非零坐标出现的位置两两不同. 故这 k 列线性无关. 由此得出, 这 k 列是列空间 $V_c(C)$ 的一组基. 我们有 C 的列秩等于 k.

根据引理 3.5, B 的列秩也等于 k. 故 B 的行秩和列秩相等. 再根据引理 3.2 和 3.4, A 的行秩和列秩相等. $\square$

定义 3.7 矩阵 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 行秩称为它的 秩. 记为 $\mathrm{rank}(A)$.

由上述定理可知, 矩阵的秩既是它的行秩也是它的列秩. 对矩阵的初等行变换和列变换统称矩阵的初等变换.

推论 3.8 设 B 是实矩阵 A 通过有限次初等变换得到的. 则 $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(B)$.

证明. 设 B 是实矩阵 A 通过一次初等行（列）变换得到的. 根据第二章引理 3.2 (第二章引理 3.5) 可知, A 和 B 的行（列）秩相同. 根据第二章定理 3.6, 它们的秩相同. □

例 3.9 计算

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 7 & 13 \end{pmatrix}.$$

计算 $\mathrm{rank}(A)$.

解. 利用初等行变换

$$A \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & -9 & -7 \\ 0 & 1 & -9 & -7 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & -9 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

于是, $\mathrm{rank}(A) = 2$.

另解. 利用初等列变换

$$A \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -9 & -7 \\ 4 & 1 & -9 & -7 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

于是, $\mathrm{rank}(A) = 2$.

例 3.10 设 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. 证明: $\operatorname{rank}(A) \le \min(m, n)$.

证明. 因为 $V_r(A)$ 是 $\mathbb{R}^{1\times m}$ 的子空间, 所以 $\dim(V_r(A)) \le m$ (第二讲命题 1.25). 故 $\operatorname{rank}(A) \le m$. 因为 $V_c(A)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间, 所以 $\dim(V_c(A)) \le n$ (第二讲命题 1.25). 故 $\operatorname{rank}(A) \le n$. □

定义 3.11 设 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. 如果 $\operatorname{rank}(A) = m$, 则称 A 是行满秩的. 如果 $\operatorname{rank}(A) = n$, 则称 A 是列满秩的. 当 $m = n$ 且 $\operatorname{rank}(A) = n$ 时, 称 A 是满秩的.

例 3.12 设 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, B \in \mathbb{R}^{m\times k}$. 令

$$(A, B) = (\vec{A}^{(1)}, \ldots, \vec{A}^{(n)}, \vec{B}^{(1)}, \ldots, \vec{B}^{(k)}) \in \mathbb{R}^{m\times(n+k)}.$$

证明: $\operatorname{rank}((A, B)) \le \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B)$.

证明. 设 $C = (A, B)$. 不妨设 $\vec{A}^{(1)}, \ldots, \vec{A}^{(n)}$ 的一个极大线性无关组是 $\vec{A}^{(1)}, \ldots, \vec{A}^{(s)}$; $\vec{B}^{(1)}, \ldots, \vec{B}^{(k)}$ 的一个极大线性无关组是 $\vec{B}^{(1)}, \ldots, \vec{B}^{(t)}$. 则矩阵 C 的列向量在

$$V = \langle \vec{A}^{(1)}, \ldots, \vec{A}^{(s)}, \vec{B}^{(1)}, \ldots, \vec{B}^{(t)} \rangle$$

中. 于是, $V_c(C) \subset V$ (第二章第一讲命题 1.25). 故 $\operatorname{rank}(C) \le \dim(V) \le s + t$. □

另证. 注意到 $V_c(C) = V_c(A) + V_c(B)$. 由子空间的维数公

式可知:

$$\begin{aligned}\dim(V_c(C)) &= \dim(V_c(A)+V_c(B))\\ &= \dim(V_c(A))+\dim(V_c(B))-\dim(V_c(A)\cap V_c(B))\\ &\leq \dim(V_c(A))+\dim(V_c(B)).\end{aligned}$$

故 $\operatorname{rank}(C)\leq \operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(B)$. □

3.3 矩阵的转置

定义 3.13 设 $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$. 矩阵 A 的 转置 是在 $\mathbb{R}^{n\times m}$ 中的矩阵. 它在第 j 行, 第 i 列处的元素等于 A 在第 i 行, 第 j 列处的元素, 其中 $i=1,\ldots,m$, $j=1,\ldots,n$. 矩阵 A 的转置记为 A^t.

例 3.14 设

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\5&6&7&8\end{pmatrix}\implies A^t=\begin{pmatrix}1&5\\2&6\\3&7\\4&8\end{pmatrix}.$$

可直接验证 $(A^t)^t=A$.

例 3.15 设 $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$. 则 $\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(A^t)$.

证明. 不妨设 $\vec{A}_1,\ldots,\vec{A}_r$ 是 A 的行向量中的一个极大线性无关组. 则 $\operatorname{rank}(A)=r$. 可直接验证 $\vec{A}_1^t,\ldots,\vec{A}_r^t$ 是 A^t 中列向量的一个极大线性无关组. 故 $\operatorname{rank}(A^t)=r$.

4 线性方程组和矩阵的秩

4.1 定性部分

定理 4.1 设 L 是以矩阵 $B=(A|\mathbf{b})\in\mathbb{R}^{m\times(n+1)}$ 为增广矩阵的 n 元线性方程组.

(i) L 相容当且仅当 $\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(B)$.

(ii) L 确定当且仅当 $\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(B)=n$.

证明. (i) 设 L 相容. 则 $\mathbf{b}\in V_c(A)$ (见第二章第一讲例 1.4). 于是, $V_c(B)\subset V_c(A)$ (第二章第二讲命题 1.26 (ii)). 我们显然有 $V_c(A)\subset V_c(B)$. 故 $V_c(A)=V_c(B)$. 从而 $\dim(V_c(A))=\dim(V_c(B))$. 于是, $\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(B)$ (第二章第二讲定理 3.6).

反之, 设 $\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(B)$. 则 $\dim(V_c(A))=\dim(V_c(B))$ (第二章第二讲定理 3.6). 因为 $V_c(A)\subset V_c(B)$, 所以 $V_c(A)=V_c(B)$ (第二章第二讲命题 2.13). 我们得到 $\mathbf{b}\in V_c(A)$, 即 L 相容(见第二章第一讲例 1.4).

(ii) 设 L 确定. 则 L 相容. 故 $\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(B)$. 下面证明 $\operatorname{rank}(A)=n$, 即 $\vec{A}^{(1)},\ldots,\vec{A}^{(n)}$ 线性无关. 设 $\alpha_1,\ldots,\alpha_n\in\mathbb{R}$ 使得

$$\alpha_1\vec{A}^{(1)}+\cdots+\alpha_n\vec{A}^{(n)}=\mathbf{0}_m.$$

且 $(\beta_1, \ldots, \beta_n)^t$ 是 L 的解. 则 $(\alpha_1 + \beta_1, \ldots, \alpha_n + \beta_n)^t$ 也是 L 的解. 因为 L 确定, 所以 $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$. 由此可知 $\vec{A}^{(1)}, \ldots, \vec{A}^{(n)}$ 线性无关.

反之, 设 $\text{rank}(A) = \text{rank}(B) = n$. 由 (i) 可知 L 相容. 故 $\mathbf{b} \in V_c(A)$. 因为 $\dim(V_c(A)) = n$, 所以 $\vec{A}^{(1)}, \ldots, \vec{A}^{(n)}$ 是 $V_c(A)$ 的一组基. 于是, 存在唯一的 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ 使得 $\mathbf{b} = \lambda_1 \vec{A}^{(1)} + \cdots + \lambda_n \vec{A}^{(n)}$. 故 $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)^t$ 是 L 唯一解. □

推论 4.2 设 H 是以矩阵 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 为系数矩阵的 n 元齐次线性方程组. 则 H 有非平凡解当且仅当 $\text{rank}(A) < n$.

证明. 注意到 H 是以 $B = (A|\mathbf{0}_m)$ 为增广矩阵的 n 元线性方程组. 显然 $\text{rank}(A) = \text{rank}(B)$. 根据定理 4.1 (ii). H 只有平凡解当且仅当 $\text{rank}(A) = n$. □

在应用中, 由 n 个方程组成的 n 元线性方程组出现的较多. 为此, 我们给出下列两个推论.

推论 4.3 设 L 是以矩阵 $B = (A|\mathbf{b}) \in \mathbb{R}^{n \times (n+1)}$ 为增广矩阵的 n 元线性方程组. 则 L 确定当且仅当 $\text{rank}(A) = n$.

证明. 设 L 确定. 根据定理 4.1 (ii), $\text{rank}(A) = n$. 反之, 设 $\text{rank}(A) = n$. 则

$$n = \text{rank}(A) \le \text{rank}(B) \le \min(n+1, n) = n.$$

故 $\text{rank}(B) = n$. 根据定理 4.1 (ii), L 确定. □

推论 4.4 设 L 是以矩阵 $B = (A|\mathbf{b}) \in \mathbb{R}^{n\times(n+1)}$ 为增广矩阵的 n 元线性方程组, H 是以 A 为系数矩阵的齐次线性方程组. 则 L 确定当且仅当 H 确定.

证明. 由推论 4.3 可知, L 确定当且仅当 $\operatorname{rank}(A) = n$. 再由推论 4.2 可知, $\operatorname{rank}(A) = n$ 当且仅当 H 只有平凡解. □.

例 4.5 科斯特利金书第七页平板受热问题.

4.2 定量部分

定理 4.6 *(对偶定理, 方程组版)* 设 H 是以 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 为系数矩阵的齐次线性方程组. 则

$$\dim(\operatorname{sol}(H)) + \operatorname{rank}(A) = n.$$

证明. 设 $r = \operatorname{rank}(A)$. 不妨设 $\vec{A}^{(1)}, \ldots, \vec{A}^{(r)}$ 是 $V_c(A)$ 的一组基. 则对任意 $j \in \{r+1, \ldots, n\}$, 存在 $\alpha_{j,1}, \ldots, \alpha_{j,r}$ 使得

$$\vec{A}^{(j)} = \alpha_{j,1}\vec{A}^{(1)} + \cdots + \alpha_{j,r}\vec{A}^{(r)}.$$

令 $\mathbf{v}_j = (\alpha_{j,1}, \ldots, \alpha_{j,r}, 0, \ldots, 0, -1, 0, \ldots, 0)^t$, 其中 -1 出现在第 j 个位置. 则 $\mathbf{v}_{r+1}, \ldots, \mathbf{v}_n$ 是 H 的解. 由 -1 在 $\mathbf{v}_j$ 中出现的位置可断定 $\mathbf{v}_{r+1}, \ldots, \mathbf{v}_n$ 线性无关. 对任意 $\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_n)^t \in \operatorname{sol}(H)$,

$$\mathbf{z} + z_{r+1}\mathbf{v}_{r+1} + \cdots + z_n\mathbf{v}_n = (\beta_1, \ldots, \beta_r, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-r})^t \in \operatorname{sol}(H), \tag{1}$$

其中 $\beta_1,\ldots,\beta_r \in \mathbb{R}$. 这是因为 $\mathrm{sol}(H)$ 是子空间(见第二章第一讲例 1.18 和命题 1.17). 由此可知,

$$\beta_1\vec{A}^{(1)} + \cdots + \beta_r\vec{A}^{(r)} = \mathbf{0}_m.$$

故 $\beta_1 = \cdots = \beta_r = 0$. 由 (1) 可知,

$$\mathbf{z} = (-z_{r+1})\mathbf{v}_{r+1} + \cdots + (-z_n)\mathbf{v}_n.$$

进而, $\mathbf{v}_{r+1},\ldots,\mathbf{v}_n$ 是 $\mathrm{sol}(H)$ 的基. 故 $\dim(\mathrm{sol}(H))=n-r$. □

例 4.7 计算下列齐次线性方程组 H

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 - x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \end{cases}$$

解空间的一组基.

解. 该方程组的系数矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

通过初等行变换得

$$A \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

于是, $\text{rank}(A)=3$. 根据定理 *4.6*, $\dim(\text{sol}(H))=4-3=1$. 由高斯消去可知, 给定的方程组等价于:

$$\begin{cases} x_1-x_2-x_3-x_4=0 \\ 2x_2+2x_4=0 \\ 2x_3-2x_4=0 \end{cases} \quad \text{等价于} \quad \begin{cases} x_1-x_2-x_3=x_4 \\ x_2=-x_4 \\ x_3=x_4 \end{cases}.$$

令 $x_4=1$. 则 $x_3=1$, $x_2=-1$, $x_1=1$. 该方程组有非零解 $\mathbf{v}=(1,-1,1,1)^t$. 故 $\text{sol}(H)$ 的基是 $\mathbf{v}$. 写成集合的形式, 我们有 $\text{sol}(H)=\{\lambda\mathbf{v}\mid\lambda\in\mathbb{R}\}$.

设 $M\in\mathbb{R}^n$ 是线性流形. 则 M 的方向的维数定义为 M 的维数, 也记为 $\dim(M)$.

推论 4.8 设 L 是以 $B=(A|\mathbf{b})\in\mathbb{R}^{m\times(n+1)}$ 为增广矩阵的 n 元线性方程组. 如果 L 相容, 则

$$\dim(\text{sol}(L))+\text{rank}(A)=n.$$

证明. 设 H 是以 $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$ 为系数矩阵的 n 元齐次线性方程组. 设 $\mathbf{v}\in\text{sol}(L)$. 根据第二章第一讲例 1.22, $\text{sol}(L)=\mathbf{v}+\text{sol}(H)$. 于是, $\dim(\text{sol}(L))=\dim(\text{sol}(H))$. 再根据定理 4.6,

$$n=\dim(\text{sol}(H))+\text{rank}(A)=\dim(\text{sol}(L))+\text{rank}(A). \quad \square$$

例 4.9 确定下列线性方程组 L

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 - x_4 + x_5 & = 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + x_5 & = 3 \\ 3x_1 - x_2 - 3x_3 - x_4 + 3x_5 & = 5 \end{cases}$$

的解流形.

解. 该方程组的增广矩阵

$$B = (A|\mathbf{b}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -3 & -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

通过初等行变换得

$$B \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

于是, $\operatorname{rank}(B) = \operatorname{rank}(A) = 2$. 根据定理 *4.1*, L 相容. 根据定理 *4.6*, $\dim(\operatorname{sol}(L)) = 5 - 2 = 3$. 由高斯消去可知, 给定方程组等价于

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 1 \\ 2x_2 + 2x_4 = 2 \end{cases} \text{等价于} \begin{cases} x_1 - x_2 = 1 + x_3 + x_4 - x_5 \\ x_2 = 1 - x_4. \end{cases}$$

令 $x_3 = x_4 = x_5 = 0$. 我们得到 $\mathbf{v} = (2, 1, 0, 0, 0)^t$ 是 L 的一个*(*特*)*解.

再由对系数矩阵的高斯消去法可知，以 A 为系数矩阵的齐次线性方程组 H 等价于

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_2 + 2x_4 = 0 \end{cases} \quad \text{等价于} \quad \begin{cases} x_1 - x_2 = x_3 + x_4 - x_5 \\ x_2 = -x_4. \end{cases}$$

分别令 $x_3 = 1, x_4 = x_5 = 0$; $x_3 = 0, x_4 = 1, x_5 = 0$; $x_3 = x_4 = 0, x_5 = 1$. 我们得到 H 的三个线性无关的解:

$\mathbf{w}_1 = (1,0,1,0,0)^t, \mathbf{w}_2 = (0,-1,0,1,0)^t, \mathbf{w}_3 = (-1,0,0,0,1)^t$.

故 $\mathrm{sol}(L) = \mathbf{v} + \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3 \rangle$.

5 坐标空间之间的线性映射

5.1 定义和（与基底无关的）性质

定义 5.1 设 $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 是映射. 如果对任意 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\underbrace{\phi(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \phi(\mathbf{x}) + \phi(\mathbf{y})}_{\text{保持加法}} \quad \text{和} \quad \underbrace{\phi(\alpha\mathbf{x}) = \alpha\phi(\mathbf{x})}_{\text{保持数乘}},$$

则称 ϕ 是线性映射.

命题 5.2 设 $\phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$. 映射 ϕ 是线性的当且仅当对任意 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$\underbrace{\phi(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) = \alpha\phi(\mathbf{x}) + \beta\phi(\mathbf{y})}_{\text{保持线性运算}}.$$

证明. 设 ϕ 是线性的. 则

$$\phi(\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y})=\phi(\alpha\mathbf{x})+\phi(\beta\mathbf{y})=\alpha\phi(\mathbf{x})+\beta\phi(\mathbf{y}).$$

故 ϕ 保持线性运算. 反之, 取 $\alpha=\beta=1$ 得到 ϕ 保持加法, 取 $\beta=0$ 得到 ϕ 保持数乘. □

命题 5.3 设 $\phi:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^m$ 是线性映射. 则

(i) $\phi(\mathbf{0}_n)=\mathbf{0}_m$;

(ii) 对任意 $\alpha_1,\ldots,\alpha_k\in\mathbb{R},\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_k\in\mathbb{R}^n$,

$$\phi(\alpha_1\mathbf{v}_1+\cdots+\alpha_k\mathbf{v}_k)=\alpha_1\phi(\mathbf{v}_1)+\cdots+\alpha_k\phi(\mathbf{v}_k).$$

证明. (i) 我们计算

$$\phi(\mathbf{0}_n)=\phi(\mathbf{0}_n+\mathbf{0}_n)=\phi(\mathbf{0}_n)+\phi(\mathbf{0}_n)\Longrightarrow\phi(\mathbf{0}_n)=\mathbf{0}_m.$$

(ii) 对 k 归纳. 当 $k=1,2$ 时, 结论成立(命题 5.2). 设 $k>2$ 且结论对 $k-1$ 成立. 则

$$\begin{aligned}\phi\left(\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\mathbf{v}_i\right)&=\phi\left(\sum_{i=1}^{k-1}\alpha_i\mathbf{v}_i+\alpha_k\mathbf{v}_k\right)\\&=\phi\left(\sum_{i=1}^{k-1}\alpha_i\mathbf{v}_i\right)+\phi\left(\alpha_k\mathbf{v}_k\right)\\&=\sum_{i=1}^{k-1}\alpha_i\phi(\mathbf{v}_i)+\alpha_k\phi(\mathbf{v}_k)\\&=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\phi(\mathbf{v}_i).\quad\square\end{aligned}$$

例 5.4 设 $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \psi_\lambda : \ \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ \mathbf{x} &\mapsto \lambda \mathbf{x}. \end{aligned}$$

是线性的. 称之为数乘映射. 当 $\lambda=0$ 时, ψ_λ 是零映射. 当 $\lambda=1$ 时, ψ_λ 是恒同映射.

例 5.5 设 $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$.

$$\begin{aligned} T_{\mathbf{v}} : \ \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ \mathbf{x} &\mapsto \mathbf{v} + \mathbf{x}. \end{aligned}$$

不是线性的. 这是因为 $T_{\mathbf{v}}(\mathbf{0}) = \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$.