第二章　矩阵

例 1.21 设 $B\in\mathbb{R}^{m\times(n+1)}$, L 是 B 对应的 n 元线性方程组, H 是 B 的前 n 列组成矩阵对应的齐次线性方程组. 如果 L 相容, 则 $\mathrm{sol}(L)=\mathbf{v}+\mathrm{sol}(H)$, 其中 $\mathbf{v}$ 是 L 的一个解. 特别地, $\mathrm{sol}(L)$ 是线性流形.

证明. 设 $M=\mathbf{v}+\mathrm{sol}(H)$ 且 $\mathbf{w}\in M$. 则存在 $\mathbf{z}\in\mathrm{sol}(H)$ 使得 $\mathbf{w}=\mathbf{v}+\mathbf{z}$. 令

$$\mathbf{v}=\begin{pmatrix}v_1\\ \vdots\\ v_n\end{pmatrix},\quad \mathbf{z}=\begin{pmatrix}z_1\\ \vdots\\ z_n\end{pmatrix}.$$

则

$$\mathbf{w}=\begin{pmatrix}v_1+z_1\\ \vdots\\ v_n+z_n\end{pmatrix}.$$

我们计算

$$\sum_{i=1}^{n}(v_i+z_i)\vec{B}^{(i)}=\sum_{i=1}^{n}v_i\vec{B}^{(i)}+\sum_{i=1}^{n}z_i\vec{B}^{(i)}=\vec{B}^{(n+1)}.$$

于是, $\mathbf{w}\in\mathrm{sol}(L)$. 由此可知, $M\subset\mathrm{sol}(L)$. 再设:

$$\mathbf{w}=\begin{pmatrix}w_1\\ \vdots\\ w_n\end{pmatrix}\in\mathrm{sol}(L).$$

则 $\mathbf{w} = \mathbf{v} + (\mathbf{w} - \mathbf{v})$. 我们计算

$$\sum_{i=1}^{n}(w_i - v_i)\vec{B}^{(i)} = \sum_{i=1}^{n} w_i\vec{B}^{(i)} - \sum_{i=1}^{n} w_i\vec{B}^{(i)} = \vec{B}^{(n+1)} - \vec{B}^{(n+1)} = \mathbf{0}_m.$$

故 $\mathbf{w} - \mathbf{v} \in \mathrm{sol}(H)$. 我们有 $\mathrm{sol}(L) \subset M$. 故 $\mathrm{sol}(L) = M$. 再根据上一讲例 *1.18*, $\mathrm{sol}(L)$ 是线性流形. $\square$

引理 1.22 设线性流形 $M = \mathbf{x} + U = \mathbf{y} + V$, 其中 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, U, V 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间. 则 $U = V$ 且 $\mathbf{x} - \mathbf{y} \in U$.

证明. 因为 $\mathbf{x} + \mathbf{0} \in M$, 所以存在 $\mathbf{v} \in V$ 使得 $\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{v}$. 于是, $\mathbf{x} - \mathbf{y} \in V$. 类似可知 $\mathbf{y} - \mathbf{x} \in U$. 我们得到

$$\pm(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \in U \cap V. \tag{1}$$

设 $\mathbf{u} \in U$. 则 $\mathbf{x} + \mathbf{u} \in M$. 于是, 存在 $\mathbf{v} \in V$ 使得

$$\mathbf{x} + \mathbf{u} = \mathbf{y} + \mathbf{v}.$$

由 (1) 可知, $\mathbf{u} = (\mathbf{y} - \mathbf{x}) + \mathbf{v}$. 故 $\mathbf{u} \in V$. 我们得到 $U \subset V$. 同理 $V \subset U$. 故 $U = V$. 进而, $\mathbf{x} - \mathbf{y} \in U \cap V = U$. $\square$

注解 1.23 一个线性流形是子空间当且仅当它含有零向量. 这是因为该流形可以写成零向量和它的方向之和.

设线性流形 $M = \mathbf{x} + U$, 其中 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ 和 U 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间. 我们称 U 是 M 的方向.

定义 1.24 设 S 是 $\mathbb{R}^n$ 的非空子集. 则由 S 中元素的所有线性组合构成的集合称为由 S 生成的子空间. 记为 $\langle S\rangle$. 集合 S 中的元素称为子空间 $\langle S\rangle$ 的一组生成元.

命题 1.25 设 S 是 $\mathbb{R}^n$ 的非空子集.

(i) $\langle S\rangle$ *是子空间;*

(ii) *设* U *是* $\mathbb{R}^n$ *的子空间且* $S\subset U$. *则* $\langle S\rangle\subset U$.

证明. (i) 设 $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\langle S\rangle$. 则存在 $\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_k,\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_\ell\in S$, $\alpha_1,\ldots,\alpha_k,\beta_1,\ldots,\beta_\ell\in\mathbb{R}$ 使得

$$\mathbf{x}=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\mathbf{u}_i\quad\text{和}\quad\mathbf{y}=\sum_{j=1}^{\ell}\beta_j\mathbf{v}_j.$$

则对任意 $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$, 我们有

$$\lambda\mathbf{x}+\mu\mathbf{y}=\lambda\left(\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\mathbf{u}_i\right)+\mu\left(\sum_{j=1}^{\ell}\beta_j\mathbf{v}_j\right)=\sum_{i=1}^{k}(\lambda\alpha_i)\mathbf{u}_i+\sum_{j=1}^{\ell}(\mu\beta_j)\mathbf{v}_j.$$

故 $\lambda\mathbf{x}+\mu\mathbf{y}\in\langle S\rangle$. 根据第二章第一讲命题 1.16, $\langle S\rangle$ 是子空间.

(ii) 因为 $S\subset U$, 所以 $\langle S\rangle\subset U$ (第二章第一讲命题 1.16). □

当 S 是有限集 $\{\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_k\}$ 时, $\langle S\rangle$ 也记作 $\langle\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_k\rangle$.

例 1.26 设 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$. 则 $\langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \rangle$ 中任意 $k+1$ 个向量必然线性相关.

证明. 设 $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_k, \mathbf{w}_{k+1} \in \langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \rangle$. 则这 $k+1$ 个向量都是 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ 的线性组合. 根据线性组合引理, $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_k, \mathbf{w}_{k+1}$ 线性相关. □

例 1.27 设 U, W 是 $\mathbb{R}^n$ 中的子空间. 则 $U+W = \langle U \cup W \rangle$.

证明. 显然 $U \cup W \subset U + W$. 根据命题 *1.25 (ii)*,

$$\langle U \cup W \rangle \subset U + W.$$

反之, 设 $\mathbf{x} \in U + W$. 则存在 $\mathbf{u} \in U$ 和 $\mathbf{w} \in W$ 使得 $\mathbf{x} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$. 于是, $\mathbf{x} \in \langle U \cup W \rangle$, 即 $U+W \subset \langle U \cup W \rangle$. □

定义 1.28 设 U, W 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间. 如果 $U \cap W = \{\mathbf{0}\}$, 则称 $U + W$ 是直和. 记为 $U \oplus W$.

2 子空间的基底和维数

2.1 极大线性相关组

定义 2.1 设 $S \subset \mathbb{R}^n$. 有限非空子集 $T \subset S$ 称为 S 的一个极大线性无关组, 如果

(i) T 中的向量线性无关;

(ii) 对任意 $\mathbf{v} \in S$, $\mathbf{v} \in \langle T \rangle$.

注解 2.2 如果 S 的一个极大线性无关组 $T = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_d\}$. 我们经常略去集合符号简称 $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_d$ 是 S 的一个极大线性无关组.

命题 2.3 设 $S \subset \mathbb{R}^n$.

(i) 设 $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ 是 S 中线性无关的向量. 则存在 S 中极大线性无关组且它包含 $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$.

(ii) 设 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_\ell \in S$ 线性无关, $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m$ 是 S 的极大线性无关组. 则 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_\ell$ 是 S 的极大线性无关组当且仅当 $\ell = m$.

证明. (i) 如果对任意 $\mathbf{u} \in S$, $\mathbf{u}, \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ 线性相关, 则 $\mathbf{u} \in \langle \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k \rangle$ (第五讲命题 1.11 (iv)). 于是, $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ 是 S 中的一个极大线性无关组且它包含 $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$. 否则, 存在 $\mathbf{u}_{k+1} \in S$ 使得 $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_{k+1}$ 线性无关. 对向量 $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_{k+1}$ 重复上述推理过程, 我们要么得出 $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_{k+1}\}$ 是 S 的极大线性无关组, 要么证明存在向量 $\mathbf{u}_{k+2} \in S$ 使得 $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_{k+1}, \mathbf{u}_{k+2}$ 线性无关. 由第五讲例 1.13 可知，S 中不可能有 $n+1$ 个线性无关的向量. 故上述推理过程重复有限步后, 我们就会得到一个 S 中的极大线性无关组且它包含 $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$.

(ii) 设 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_\ell$ 是 S 的极大线性无关组. 因为

$$\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m \in \langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_\ell \rangle,$$

所以 $m \leq \ell$ (线性组合引理). 同理可知, $\ell \leq m$.

反之, 设 $\ell = m$. 由 (i) 可知, S 有一个极大线性无关组

$$\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m, \mathbf{v}_{m+1}, \ldots, \mathbf{v}_{m+s}$$

由极大线性无关组的定义可知 $\mathbf{v}_i \in \langle \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m \rangle$, $i = 1$, $2, \ldots, m+s$. 假设 $s > 0$. 根据线性组合引理, $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$, $\mathbf{v}_{m+1}, \ldots, \mathbf{v}_{m+s}$ 线性相关, 矛盾. 故 $s = 0$. 即 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$ 是 S 的极大线性无关组. □

注解 2.4 由上述命题可知, 任何含有非零向量的集合必有极大线性无关组.

例 2.5 向量 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一组极大线性无关组.

例 2.6 证明 $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \ldots, \mathbf{e}_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个极大线性无关组.

证明. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ 使得

$$\alpha_1(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) + \alpha_2(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2) + \alpha_3\mathbf{e}_3 + \cdots + \alpha_n\mathbf{e}_n = \mathbf{0}.$$

则

$$(\alpha_1 + \alpha_2)\mathbf{e}_1 + (\alpha_1 - \alpha_2)\mathbf{e}_2 + \alpha_3\mathbf{e}_3 + \cdots + \alpha_n\mathbf{e}_n = \mathbf{0}.$$

因为 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ 线性无关, 所以 $\alpha_1+\alpha_2=0$, $\alpha_1-\alpha_2=0$, $\alpha_3=0$, $\ldots$, $\alpha_n=0$. 故 $\alpha_1=\alpha_2=0$. 于是,

$$\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \ldots, \mathbf{e}_n$$

线性无关. 由命题 *2.3 (ii)* 可知, $\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \ldots, \mathbf{e}_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个极大线性无关组.

2.2 子空间的基底

定义 2.7 设 $U \subset \mathbb{R}^n$ 是子空间且 $U \neq \{\mathbf{0}\}$. 向量集 $\{\mathbf{u}_1, \ldots \mathbf{u}_d\} \subset U$ 称为 U 的一组基, 如果对任意 $\mathbf{u} \in U$, 存在唯一的 $\alpha_1, \ldots, \alpha_d \in \mathbb{R}$, 使得 $\mathbf{u} = \alpha_1\mathbf{u}_1 + \cdots + \alpha_d\mathbf{u}_d$.

如注解 2.2 所述, 当 $\{\mathbf{u}_1, \ldots \mathbf{u}_d\}$ 是子空间 U 的一组基时, 我们也简称 $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_d$ 是 U 的一组基.

命题 2.8 设 $U \subset \mathbb{R}^n$ 是子空间且 $U \neq \{\mathbf{0}\}$. 向量集 $\{\mathbf{u}_1, \ldots \mathbf{u}_d\}$ 是 U 的一组基当且仅当该向量集是 U 的极大线性无关组.

证明. 设 $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_d\}$ 是 U 的基. 再设 $\alpha_1, \ldots, \alpha_d \in \mathbb{R}$ 使得

$$\alpha_1\mathbf{u}_1 + \cdots + \alpha_d\mathbf{u}_d = \mathbf{0}.$$

由基底定义可知, $\alpha_1 = \cdots = \alpha_d = \mathbf{0}$. 故 $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_d$ 线性无关. 再由基底定义中条件 (ii) 可知, $\mathbf{u}_1$, $\ldots\mathbf{u}_d$ 是 U 的极大线性无关组.

反之, 设 $\mathbf{u}_1, \ldots \mathbf{u}_d$ 是 U 的一个极大线性无关组. 根据第五讲命题 1.11 (iv), $\mathbf{u}_1, \ldots \mathbf{u}_d$ 是 U 的一组基. $\square$

由例 2.5 可知, $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一组基. 称之为 $\mathbb{R}^n$ 的标准基.

推论 2.9 设 $S \subset \mathbb{R}^n$ 包含非零向量. 则 S 中的极大线性无关组是 $\langle S \rangle$ 的一组基.

证明. 设 $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_d$ 是 S 的一个极大线性无关组. 则

$$S \subset \langle \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_d \rangle.$$

由第五讲命题 1.25, $\langle S \rangle \subset \langle \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_d \rangle$. 而另一个方向的包含关系是显然的. 于是, $\langle S \rangle = \langle \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_d \rangle$. 即 $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_d$ 是 $\langle S \rangle$ 的极大线性无关组. 根据上述命题, $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_d$ 是 $\langle S \rangle$ 的一组基. $\square$

例 2.10 设

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{z} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

求 $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle$ 的一组基.

解. 根据上述推论, 我们只要求出 $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}\}$ 中的一个极大

线性无关组即可.

$$(\mathbf{x},\mathbf{y})=\begin{pmatrix}1&1\\2&-1\\3&0\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&1\\0&-3\\0&-3\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&1\\0&-3\\0&0\end{pmatrix}.$$

于是, 以矩阵 $(\mathbf{x},\mathbf{y})$ 为系数矩阵的齐次线性方程组只有平凡解. 故 $\mathbf{x},\mathbf{y}$ 线性无关. 由第二章第一讲例 *1.9*, $\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}$ 线性相关. 故 $\mathbf{x},\mathbf{y}$ 是 $\langle\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}\rangle$ 的一组基. 类似地可知, $\mathbf{x},\mathbf{z}$ 和 $\mathbf{y},\mathbf{z}$ 都是 $\langle\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}\rangle$ 的基

定理 2.11 *(基扩充定理)* 设 $\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_k$ 是子空间 U 中线性无关的向量. 则 U 有一组基包含 $\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_k$.

证明. 根据命题 2.3 (i), U 中有极大线性无关组包含 $\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_k$. 再根据上述命题, 该极大线性无关组是 U 的一组基. □

2.3 维数

定义 2.12 设 U 是 $\mathbb{R}^n$ 中的子空间. 如果 $\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_d$ 是 U 的一组基, 则 U 的维数*(dimension)*定义为 d. 当 $U=\{\mathbf{0}\}$ 时, 其维数定义为 0. 该维数记为 $\dim(U)$.

根据命题 2.3 (ii) 和命题 2.8, 子空间维数是良定义的. 因为坐标空间 $\mathbb{R}^n$ 有标准基 $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$, 所以 $\dim(\mathbb{R}^n)=n$.

命题 2.13 设 U,W 是 $\mathbb{R}^n$ 的两个子空间且 $U \subset W$. 则 $\dim(U)\leq\dim(W)$. 进而, $U=W$ 当且仅当 $\dim(U)=\dim(W)$.

证明. 设 $\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_d$ 是 U 的一组基. 由假设 $U \subset W$ 和基扩充定理 2.11, W 有一组基包含 $\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_d$. 故 $\dim(U)\leq\dim(W)$.

再设 $d=\dim(W)$. 则 $\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_d$ 也是 W 的基(命题 2.3 (ii)). 故 $W\subset\langle u_1,\ldots,u_d\rangle=U$. □

命题 2.14 设 U,W 是 $\mathbb{R}^n$ 的两个子空间. 则

$$\dim(U+W)+\dim(U\cap W)=\dim(U)+\dim(W).$$

证明. 令 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_k$ 是 $U\cap W$ 的一组基. 由基扩充定理, U 有基底 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_k,\mathbf{u}_{k+1},\ldots,\mathbf{u}_{k+\ell}$; W 有基底 $\mathbf{v}_1,\ \ldots,\mathbf{v}_k$, $\mathbf{w}_{k+1},\ \ldots,\ \mathbf{w}_{k+m}$.

断言. $S=\{\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_k,\mathbf{u}_{k+1},\ldots,\mathbf{u}_{k+\ell},\mathbf{w}_{k+1},\ldots,\mathbf{w}_{k+m}\}$ 是 $U+W$ 的一组基.

断言的证明. 设 $\alpha_1,\ldots,\alpha_k,\beta_1,\ldots,\beta_\ell,\ \gamma_1,\ldots,\gamma_m\in\mathbb{R}$ 使得

$$\alpha_1\mathbf{v}_1+\cdots+\alpha_k\mathbf{v}_k+\beta_1\mathbf{u}_{k+1}+\cdots+\beta_\ell\mathbf{u}_{k+\ell}+\underbrace{\gamma_1\mathbf{w}_{k+1}+\cdots+\gamma_m\mathbf{w}_{k+m}}_{\mathbf{w}}=\mathbf{0}.$$

则 $\mathbf{w}\in U\cap W$. 于是, 存在 $\lambda_1,\ldots,\lambda_k\in\mathbb{R}$ 使得

$$\mathbf{w}=\lambda_1\mathbf{v}_1+\cdots+\lambda_k\mathbf{v}_k.$$

即

$$(-\gamma_1)\mathbf{w}_1 + \cdots + (-\gamma_m)\mathbf{w}_m + \lambda_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \lambda_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}.$$

因为 $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ 线性无关, 所以

$$\gamma_1 = \cdots = \gamma_m = 0.$$

故

$$\alpha_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_k\mathbf{v}_k + \beta_1\mathbf{u}_{k+1} + \cdots + \beta_\ell\mathbf{u}_{k+\ell} = \mathbf{0}.$$

因为 $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_\ell, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ 线性无关, 所以 $\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = \beta_1 = \cdots = \beta_\ell = 0$. 于是, S 中的向量线性无关.

再设 $\mathbf{x} \in U + W$. 则存在 $\mathbf{y} \in U$ 和 $\mathbf{z} \in W$ 使得 $\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{z}$. 因为 $\mathbf{y}$ 是 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k, \mathbf{u}_{k+1}, \ldots, \mathbf{u}_{k+\ell}$ 的线性组合, $\mathbf{z}$ 是 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k, \mathbf{w}_{k+1}, \ldots, \mathbf{w}_{k+m}$ 的线性组合. 故 $\mathbf{x}$ 是 S 中的向量的线性组合. 即 S 是 $U + W$ 的一个极大线性无关组. 根据命题 2.8, 断言成立.

由断言可知 $\dim(U + W) = k + \ell + m$. 因为

$$\dim(U \cap W) = k,\ \dim(U) = k + \ell,\ \dim(W) = k + m,$$

所以

$$\dim(U + W) + \dim(U \cap W) = \dim(U) + \dim(W). \quad \square$$

注解 2.15 在上述命题证明中, 当 $U \cap W = \{\mathbf{0}\}$, 则集合 $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ 是空集, 即 $k = 0$.

例 2.16 设 $U, W \subset \mathbb{R}^n$ 是子空间, $\dim(U){=}d > 0$, $\dim(W){=}n{-}1$. 证明 $\dim(U \cap W) \geq d - 1$.

证明. 由维数公式可知:

$$\begin{aligned}
\dim(U \cap W) &= \dim(U) + \dim(W) - \dim(U + W) \\
&\geq d + n - 1 - n \quad (\because \dim(U + W) \leq n) \\
&= d - 1.
\end{aligned}$$

例 2.17 设 $U, W \subset \mathbb{R}^n$ 是子空间. 证明 $V + W$ 是直和当且仅当 $\dim(V + W) = \dim(V) + \dim(W)$.

证明. 由维数公式可知

$$\begin{aligned}
\dim(V + W) &= \dim(V) + \dim(W) \\
&\Longleftrightarrow \dim(U \cap W) = 0 \\
&\Longleftrightarrow U \cap W = \{\mathbf{0}\}. \quad \square
\end{aligned}$$