第一章　预备知识

例 5.8 设 S 是中关村中学所有学生的集合, $\sim_c$ 是该集合上同班同学关系. 该关系是等价关系.

设 $x \in \mathbb{Z}$ 和 $m \in \mathbb{Z}^+$. 则存在唯一整数 $q, r \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$ 使得

$$x = qm + r. \tag{1}$$

我们来验证唯一性. 再设 $x = um + v$, 其中 $u \in \mathbb{Z}$ 和 $v \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$. 不妨设 $v \geq r$. 则 $(q-u)m = v - r$. 因为 $m > v - r$, 所以 $v = r$. 由此得出 $q = u$. 我们称 r 是 x 关于 m 的余数, q 是 x 关于 m 的商. 它们分别记为 $\mathrm{rem}(x, m)$ 和 $\mathrm{quo}(x, m)$.

如果存在 $k \in \mathbb{Z}$ 使得 $x = km$, 则称 m 整除 x. 记为 $m \mid x$.

定义 5.9 设 $m \in \mathbb{Z}^+$. 设 $x, y \in \mathbb{Z}$. 我们称 x 和 y 关于 m 同余, 如果 $m \mid (x - y)$. 记为 $x \equiv_m y$ 或 $x \equiv y \mod m$.

下面我们来验证 $\equiv_m$ 是等价关系.

- (自反性.)对任意 $x \in \mathbb{Z}$, $m|(x - x)$, 于是, $x \equiv_m x$.
- (对称性.) 设 $x, y \in \mathbb{Z}$ 且 $x \equiv_m y$. 则存在 $a \in \mathbb{Z}$ 使得 $(x - y) = am$. 则 $y - x = (-a)m$. 故 $m \mid (y - x)$. 我们得到 $y \equiv_m x$.

- (传递性.) 设 $x, y, z \in \mathbb{Z}$ 满足 $x \equiv_m y$ 和 $y \equiv_m z$. 则存在 $a, b \in \mathbb{Z}$ 使得 $x - y = am$ 和 $y - z = bm$. 于是, $x - z{=}(a + b)m$. 故 $x \equiv_m z$.

验证完毕.

命题 5.10 设 $m \in \mathbb{Z}^+$, $x, y \in \mathbb{Z}$. 则 $x \equiv_m y$ 当且仅当 $\mathrm{rem}(x, m) = \mathrm{rem}(y, m)$.

证明. 由 (1) 可知, 对任意整数 x, $x \equiv_m \mathrm{rem}(x, m)$. 由对称性和传递性可知

$$x \equiv_m y \Longleftrightarrow \mathrm{rem}(x, m) \equiv_m \mathrm{rem}(y, m).$$

不妨设 $\mathrm{rem}(x, m) \geq \mathrm{rem}(y, m)$. 注意到

$$\mathrm{rem}(x, m) \equiv_m \mathrm{rem}(y, m)$$

等价于存在 $a \in \mathbb{Z}$ 使得

$$am = \mathrm{rem}(x, m) - \mathrm{rem}(y, m).$$

由余数范围的定义可知 $a = 0$. 故 $\mathrm{rem}(x, m) \equiv_m \mathrm{rem}(y, m)$ 等价于 $\mathrm{rem}(x, m) = \mathrm{rem}(y, m)$. □

5.3 等价类和商集

设 $\sim$ 是 S 上的等价关系, $x{\in}S$. 则关于 x 的等价类是

$$\bar{x} = \{y \in S | x \sim y\}.$$

此外, $\bar{x}$ 中的任何一个元素都是该等价类的一个代表元.

注解 5.11 设 $\sim$ 是 S 上的等价关系, $x \in S$. 根据自反性, $x \in \bar{x}$.

命题 5.12 设 $\sim$ 是集合 S 上的等价关系, $x, y \in S$.

(i) $x \sim y \Longleftrightarrow \bar{x} = \bar{y}$.

(ii) $x \nsim y \Longleftrightarrow \bar{x} \cap \bar{y} = \emptyset$.

证明. (i) 设 $x \sim y$ 且 $a \in \bar{x}$. 则 $x \sim a$. 根据对称性, $y \sim x$. 再由传递性, $y \sim a$. 于是, $a \in \bar{y}$. 我们得到 $\bar{x} \subset \bar{y}$. 同理 $\bar{y} \subset \bar{x}$. 故 $\bar{x} = \bar{y}$. 反之, 设 $\bar{x} = \bar{y}$. 根据注释 5.11, $x \in \bar{x}$ 和 $y \in \bar{y}$. 故 $y \in \bar{x}$. 由此得出, $x \sim y$.

(ii) 由 (i) 可知, $\bar{x} \cap \bar{y} = \emptyset \Longrightarrow x \nsim y$. 反之, 设 $x \nsim y$. 若 $z \in \bar{x} \cap \bar{y}$. 则 $x \sim z$ 和 $y \sim z$. 根据对称性和传递性, $x \sim y$. 矛盾. □

例 5.8 的等价类是该中学所有的班, 每个同学都是所在班的代表元. 集合 $\mathbb{Z}$ 关于 $\equiv_2$ 共有两个等价类: 偶数集和奇数集. 偶数集可记为 $\bar{0}, \bar{2}, \overline{-2}, \ldots$, 而奇数集的代表元可记为 $\bar{1}, \overline{-1}, \bar{3}, \overline{-3}, \ldots$,

例 5.13 设 $m \in \mathbb{Z}^+$. 则 $\mathbb{Z}$ 关于 $\equiv_m$ 的等价类是

$$\bar{0} = \{km | k \in \mathbb{Z}\},\ \bar{1} = \{km + 1 | k \in \mathbb{Z}\},$$

$$\ldots,\ \overline{m-1} = \{km + m - 1 | k \in \mathbb{Z}\}.$$

定义 5.14 设 $\sim$ 是 S 上的等价关系. 关于 $\sim$ 的所有等价类的集合称为 S 关于 $\sim$ 的商集. 记为 $S/\sim$. 映射

$$\begin{array}{ccc} \pi: & S & \longrightarrow & S/\sim \\ & x & \mapsto & \bar{x} \end{array}$$

称为关于 $\sim$ 的商映射或自然投射.

注意到商映射是满射. 对于例 5.8 中的等价关系, 其商映射就是判断每位同学是哪个班的. 对于 $\equiv_2$, 其商映射就是判断每个整数的奇偶性.

5.4 集合的划分

定义 5.15 设 S 是非空集, $\mathcal{P}$ 是 S 中一些非空子集组成的集合*(有限或无限)*. 如果

(i) 对任意不相等的 $U, V \in \mathcal{P}$, $U \cap V = \emptyset$,

(ii) $S = \bigcup_{U \in \mathcal{P}} U$,

则称 $\mathcal{P}$ 是 S 的一个划分 *(partition)*.

设 $\sim$ 是 S 上的等价关系. 根据命题 5.12 和等价关系的自反性, $S/\sim$ 是 S 的一个划分. 反之, 设 $\mathcal{P}$ 是 S 的一个划分. 我们定义 S 上的二元关系 $\sim_{\mathcal{P}}$ 如下: 对 $x, y \in S$, 如果存在 $U \in \mathcal{P}$ 使得 U, 则 $x \sim_{\mathcal{P}} y$.

下面我们来验证 $\sim_P$ 是等价关系. 由定义 5.15 中的条件 (ii) 可知, 对任意 $x \in S$, 存在 $U \in \mathcal{P}$ 使得 $x \in U$. 于是, $x \sim_{\mathcal{P}} x$. 自反性成立. 设 $x \sim_{\mathcal{P}} y$. 则存在 $U \in \mathcal{P}$ 使得 $x, y \in U$. 故 $y, x \in U$. 于是, $y \sim_{\mathcal{P}} x$. 对称性成立. 设 $x \sim_{\mathcal{P}} y$ 和 $y \sim_{\mathcal{P}} z$. 则存在存在 $U, V \in \mathcal{P}$, 使得 $x, y \in U$ 和 $y, z \in V$. 于是, $y \in U \cap V$. 由定义 5.15 中的条件 (ii) 可知, $U = V$. 故 $x, z \in U$. 从而, $x \sim_{\mathcal{P}} z$. 传递性成立. 称 $\sim_P$ 是由划分 P 诱导的等价关系.

根据命题 5.12, 对于给定的集合 S 上的等价关系 $\sim$, 划分 $S/\sim$ 诱导的等价关系就是 $\sim$.

反之, 对于给定的集合 S 的划分 $\mathcal{P}$, 其诱导等价关系的商集 $S/\sim_{\mathcal{P}}$ 就是 $\mathcal{P}$. 验证如下:

先验证 $S/\sim_{\mathcal{P}} \subset \mathcal{P}$. 设 $U \in S/\sim_{\mathcal{P}}$. 则存在 $x \in S$ 使得 $U = \bar{x}$, 且存在 $V \in \mathcal{P}$ 使得 $x \in V$. 我们来证明 $U = V$. 设 $y \in U$. 则 $y \in \bar{x}$. 即 $y \sim_{\mathcal{P}} x$. 故存在 $W \in \mathcal{P}$ 使得 $x, y \in W$. 于是, $x \in V \cap W$. 由分划的定义可知 $V = W$. 于是, $y \in V$. 我们得到 $U \subset V$. 反之, 设 $y \in V$. 则 $y \in V$. 则 $y \sim_{\mathcal{P}} x$. 故 $y \in \bar{x} = U$. 由此得出 $U = V$. 从而, $U \in \mathcal{P}$. 关系 $S/\sim_{\mathcal{P}} \subset \mathcal{P}$ 成立.

再验证 $\mathcal{P} \subset S/\sim_{\mathcal{P}}$. 设 $U \in \mathcal{P}$. 因为 U 非空, 所以可设 $x \in U$. 我们来验证 $U = \bar{x}$. 设 $y \in U$. 则 $y \sim_{\mathcal{P}} x$. 故 $y \in \bar{x}$. 我们有 $U \subset \bar{x}$. 反之, 设 $y \in \bar{x}$. 则 $y \sim_{\mathcal{P}} x$. 故存

在 $W \in \mathcal{P}$ 使得 $x, y \in W$. 与上段推理类似可得 $U = W$. 于是, $y \in U$. 从而得出 $\bar{x} \subset U$. 故$U = \bar{x} \in S/\sim_P$. 关系 $\mathcal{P} \subset S/\sim_{\mathcal{P}}$ 成立.

综上所述, 结论 $S/\sim_{\mathcal{P}} = \mathcal{P}$ 成立.

因此, 等价关系通过其商集对集合分类, 而商映射意味着对集合中的元素归类. 另一方面, 对集合元素进行分类(划分)就是在集合上引入一个等价关系.

例 5.16 设 $S = [0,3] \times [0,1]$. 令

$$\begin{aligned}\mathcal{P} =&\{\{(x,y)\} \,|\, (x,y) \in S \text{ 且 } 0 < x < 3\} \\ &\cup \{\{(0,y),(3,y)\} \,|\, 0 \le y \le 1\}.\end{aligned}$$

则 $S/\sim_{\mathcal{P}}$ 是一个圆柱. 令

$$\begin{aligned}\mathcal{Q} =&\{\{(x,y)\} \,|\, (x,y) \in S \text{ 且 } 0 < x < 3\} \\ &\cup \{\{(0,y),(3,1-y)\} \,|\, 0 \le y \le 1\}.\end{aligned}$$

则 $S/\sim_{\mathcal{Q}}$ 是 *Möbius* 带.

5.5 映射分解定理

定义 5.17 设 $f : S \longrightarrow T$ 是映射. 如果 $f(x) = f(y)$, 则记 $x \sim_f y$. 称 $\sim_f$ 是由 f 诱导的等价关系.

我们来验证 $\sim_f$ 是等价关系. 对任意 $x \in S$, $f(x) = f(x)$. 于是, $x \sim_f x$. 自反性成立. 设 $x \sim_f y$. 则 $f(x) = f(y)$.

故 $f(y) = f(x)$. 于是, $y \sim_f x$. 对称性成立. 设 $x \sim_f y$ 和 $y \sim_f z$. 则 $f(x) = f(y)$ 且 $f(y) = f(z)$. 故 $f(x) = f(z)$. 于是, $x \sim_f z$. 传递性成立. 验证完毕.

例 5.18 设

$$\begin{array}{rccc} f & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & \sqrt{x^2+y^2} \end{array}.$$

则 $\mathbb{R}^2$ 中两点关于 $\sim_f$ 等价当且仅当这两点在以原点为圆心的同心圆上. 而 $\mathbb{R}^2/\sim_f$ 是以原点为圆心的所有圆构成的集合.

定理 5.19 设 $f : S \longrightarrow T$ 是映射, π 是关于 $\sim_f$ 的商映射. 则存在唯一的映射 $\bar{f} : S/\sim_f \longrightarrow T$ 使得 $f = \bar{f} \circ \pi$, 且该映射是单射.

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{f} & T \\ & {\scriptstyle\pi}\searrow \quad \nearrow{\scriptstyle\bar{f}} & \\ & (S/\sim_f) & \end{array}$$

证明. 设:

$$\begin{array}{rccc} \bar{f}: & S/\sim_f & \longrightarrow & T \\ & \bar{x} & \mapsto & f(x). \end{array}$$

因为 $\bar{x}$ 可能有不同的代表元, 所以我们需要验证 $\bar{f}$ 是良定义的. 设 $\bar{x} = \bar{y}$. 根据命题 5.12, $x \sim_f y$. 即 $f(x) = f(y)$. 故 $\bar{f}(\bar{x}) = \bar{f}(\bar{y})$. 于是, $\bar{f}$ 是良定义的.

对任意 $x \in S$, $\bar{f} \circ \pi(x) = \bar{f}(\bar{x}) = f(x)$. 故 $f = \bar{f} \circ \pi$. 存在性成立.

再设 $g : S/\!\sim_f \longrightarrow T$ 是映射使得 $f = g \circ \pi$. 则对于任意 $x \in S$,

$$f(x) = g \circ \pi(x) \implies g(\bar{x}) = f(x) = \bar{f}(\bar{x}).$$

即 $g = \bar{f}$. 唯一性成立.

设 $\bar{f}(\bar{x}) = \bar{f}(\bar{y})$. 则 $f(x) = f(y)$. 故 $x \sim_f y$. 根据命题 5.12 (i), $\bar{x} = \bar{y}$. 故 $\bar{f}$ 是单射. □

例 5.20 设 S 是某中学全体学生的集合, T 是该中学全体老师的集合. 定义:

$$\begin{array}{rccl} f: & S & \longrightarrow & T \\ & x & \mapsto & x \text{ 的班主任.} \end{array}$$

则 $\sim_f$ 是例 5.8 中的等价关系. 商集 $S/\!\sim_f$ 是该中学所有的班. 而诱导映射 $\bar{f}$ 把班映到班主任, 它显然是单射. □

例 5.21 设 $m \in \mathbb{Z}^+$. 定义:

$$\begin{array}{rccl} r: & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ & x & \mapsto & \mathrm{rem}(x, m). \end{array}$$

则 $\sim_r$ 是关于 m 的同余关系. 商集 $S/\sim_r$ 是集合

$$\{\bar{0}, \bar{1}, \ldots, \overline{m-1}\}.$$

而诱导映射 $\bar{r}$ 把 $\bar{x}$ 映到 $\bar{x}$ 最小的非负代表元 $\mathrm{rem}(x, m)$, 它显然是单射. □

5.6 序关系

定义 5.22 设 $\preceq$ 是集合 S 上的二元关系. 如果

(i) 对任意 $x \in S$, $x \preceq x$ *(自反性)*,

(ii) 如果 $x, y \in S$ 且 $x \preceq y$ 和 $y \preceq x$, 则 $y = x$ *(反对称性)*,

(iii) 如果 $x, y, z \in S$, $x \preceq y$ 且 $y \preceq z$, 则 $x \preceq z$ *(传递性)*,

则称 $\sim$ 是偏序. 进而, 设 $\preceq$ 是 S 上的偏序. 如果对任意 $x, y \in S$, 我们有 $x \preceq y$ 或 $y \preceq x$. 则称 $\preceq$ 是全序.

例 5.23 在实数集上, $\leq$ 和 $\geq$ 都是全序. 设 S 是非空集合, T 是 S 中所有子集的集合. 则 $\subset$ 和 $\supset$ 是 T 上的偏序关系.

定义 5.24 设 $\preceq$ 是集合 S 上的偏序关系, $z \in S$. 如果不存在 $x \in S \setminus \{x\}$ 使得 $z \preceq x$, 则称 z 是 S 中关于 $\preceq$ 的极大元. 如果对于任意 $x \in S$, 我们都有 $x \preceq z$. 则称 z 是 S

中关于 $\preceq$ 的最大元. 类似地, 我们可以定义关于偏序的极小元和最小元.

注解 5.25 极小元意味着集合 S 中没有其它元素比它更小. 最小元意味着集合 S 中的其它元素都比它小. 对极大元和最大原有类似的直观描述.

注解 5.26 设 $\preceq$ 是集合 S 上的偏序关系, z_1 和 z_2 是关于 $\preceq$ 的两个最大元. 则 $z_1 \preceq z_2$ 和 $z_2 \preceq z_1$. 根据反对称性 $z_1 = z_2$. 故当最大元存在时, 它是唯一的. 此时它也是唯一的极大元. 类似的结论也适用于最小元和极小元.

例 5.27 设 $S = \{1, 2, 3\}$, T 是 S 的所有真子集组成的集合. 则 $\subset$ 是 T 上的偏序. 关于该偏序的极大元是 $\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}$, 没有最大元. 关于该偏序的最小元是 $\emptyset$, 也是唯一的极小元. □

6 置换

6.1 置换的定义和乘法

设 T 是含有 n 个元素的集合. 我们不妨设

$$T = \{1, 2, \ldots, n\}.$$

令 S_n 是从 T 到 T 的所有双射的集合. 则 $\mathrm{card}(S_n) = n!$.

设 $\sigma \in S_n$ 使得 $\sigma(k) = i_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$. 我们可以把 σ 表示为

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_n \end{pmatrix},$$

其中 $i_1, i_2, \ldots, i_n \in T$, 两两不同. 我们称 σ 是一个关于 $1, 2, \ldots, n$ 的置换. 设 e 是 T 上的恒同映射, 即

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ 1 & 2 & \ldots & n \end{pmatrix},$$

因为双射的复合仍是双射, 所以, 对任意 $\sigma, \tau \in S_n$, $\sigma \circ \tau \in S_n$. 我们把 $\sigma \circ \tau$ 简记为 $\sigma\tau$, 并简称为 σ 和 τ 的积. 由映射复合的性质可知, 对任意 $\sigma, \tau, \delta \in S_n$,

$$(\sigma\tau)\delta = \sigma(\tau\delta) \quad \text{和} \quad e\sigma = \sigma e = \sigma.$$

又因为 σ 是双射, 所以 $\sigma^{-1} \in S_n$ 且

$$\sigma\sigma^{-1} = \sigma^{-1}\sigma = e.$$

例 6.1 设在 S_4 中

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{和} \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

计算 $\sigma\tau$ 和 $\tau\sigma$,

解. 根据映射复合的定义可知:

$$\sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

和

$$\tau\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

注解 6.2 在上例中, $\sigma\tau \neq \tau\sigma$. 故 S_n 中的乘法不满足交换律. 特别地,

$$(\sigma\tau)^2 = \sigma\tau\sigma\tau$$

一般不等于 $\sigma^2\tau^2$.

设 $k \in \mathbb{Z}$, $\sigma \in S_n$. 如果 $k > 0$, 则

$$\sigma^k := \underbrace{\sigma \circ \cdots \circ \sigma}_{k}.$$

当 $k = 0$ 时, $\sigma^k := e$. 当 $k < 0$,

$$\sigma^k := \underbrace{\sigma^{-1} \circ \cdots \circ \sigma^{-1}}_{-k}.$$

可直接验证, 对任意 $i, j \in \mathbb{Z}$,

$$\sigma^i\sigma^j = \sigma^{i+j}, \quad \sigma^{ij} = (\sigma^i)^j = (\sigma^j)^i.$$

根据穿衣脱衣规则, 对任意 $\tau \in S_n$,

$$(\sigma\tau)^{-1} = \tau^{-1}\sigma^{-1}.$$

引理 6.3 设 $\sigma \in S_n$. 则存在 $k \in \mathbb{Z}^+$ 使得 $\sigma^k = e$.

证明. 考虑无穷序列: $\sigma, \sigma^2, \ldots$. 则存在 $i, j \in \mathbb{Z}^+$ 且 $i < j$ 使得 $\sigma^j = \sigma^i$. 于是, $\sigma^{j-i} = e$. □

定义 6.4 设 $\sigma \in S_n$. 使得 $\sigma^k = e$ 的最小正整数称为 σ 的阶, 记为 $\mathrm{ord}(\sigma)$.

例 6.5 设

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in S_4.$$

求 $\mathrm{ord}(\sigma)$.

解. 直接计算得

$$\sigma^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

进而,

$$\sigma^3 = \sigma\sigma^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = e.$$

于是, $\mathrm{ord}(\sigma) = 3$.

命题 6.6 设 $\sigma \in S_n$ 且 $k = \mathrm{ord}(\sigma)$. 则对任意 $m \in \mathbb{Z}$, $\sigma^m = e \iff k | m$.

证明. 设 $q = \mathrm{quo}(m,k), r = \mathrm{rem}(m,k)$. 则

$$\sigma^m = \sigma^{qk+r} = (\sigma^k)^q \sigma^r = \sigma^r.$$

于是, $\sigma^m = e \Longleftrightarrow \sigma^r = e$. 因为 $0 \leq r < k$, 所以

$$\sigma^m = e \Longleftrightarrow r = 0. \quad \square$$

6.2 循环分解

定义 6.7 设 $\sigma \in S_n$. 如果存在 $i_1, i_2, \ldots, i_k \in T$ 两两不同使得

$$\sigma(i_1) = i_2, \sigma(i_2) = i_3, \ldots, \sigma(i_{k-1}) = i_k, \sigma(i_k) = i_1$$

且对任意 $m \in T \setminus \{i_1, \ldots, i_k\}$,

$$\sigma(m) = m,$$

则称 σ 是一个长度为 k 的循环. 我们把这样的循环记为 $(i_1 i_2 \ldots i_k)$.

注意到

$$(i_1 i_2, \ldots, i_k) = (i_2 i_3 \ldots i_k i_1) = (i_3 i_4 \ldots i_k i_1 i_2) = \cdots.$$

此外, 长度为 1 的循环只有 e.

例 6.8 可直接验证循环 $(i_1 i_2 \ldots i_k)^{-1} = (i_k i_{k-1} \ldots i_2 i_1)$.