作业十七

2022 年 6 月 12 日

1. 设对称矩阵
$$A=\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&-1&1&0\\0&1&-1&0\\-1&0&0&1\end{pmatrix}.$$
计算正交矩阵 P 和对角矩阵 B 使得 $P^tAP=B$.

2. 设 V 是一个奇数维内积空间, $\mathcal{A}$ 为 V 上的正交变换, $\det(\mathcal{A})=1$. 证明: $\mathcal{A}$ 有特征值 1.

3. 设 V 是一个有限维向量空间, $(\ |\ )$ 为其上内积, η 为 V 中的一个单位向量, 定义 V 中一个线性映射如下:
$$\begin{aligned}\mathcal{A}:V&\to V\\ x&\mapsto x-2(x|\eta)\eta.\end{aligned}$$
(称这样的映射 $\mathcal{A}$ 为一个**镜面反射**) 证明:
   (a) $\mathcal{A}$ 是正交变换.
   (b) $\mathcal{A}^2=\mathcal{E}$.
   (c) $\det(\mathcal{A})=-1$.

4. 设 A 是斜对称矩阵且可逆, 证明: $A+A^2$ 也可逆.

5. 设 $A\in M_n(\mathbb{R})$ 为正定矩阵, 证明: $A+A^{-1}-2E_n$ 为半正定矩阵, 并指出什么时候 $A+A^{-1}-2E_n$ 正定.

6. (选做题) 利用正交线性变换将如下实二次型化为标准型
$$f=n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2.$$