第十六周作业

1. 设标准欧式空间 $\mathbb{R}^4$ 中 $\mathbf{u}_1 = (1,0,1,0)^t, \mathbf{u}_2 = (1,1,1,1)^t$. 计算: $\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle^\perp$ 的一组单位正交基.

2. 设标准欧式 $\mathbb{R}^5$ 中的子空间 U 是矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

   对应的齐次线性方程组的解空间. 计算 $U^\perp$ 的一组单位正交基.

3. 设 $\mathbb{R}^3$ 中，子空间 $W = \langle (1,0,0)^t, (1,2,1)^t \rangle$. 再设 $\mathbf{v} = (1,1,1)^t$. 计算 $\mathbf{v}$ 到 W 的距离和 $\mathbf{v}$ 与 W 的夹角(即 $\mathbf{v}$ 与其在 W 上正交投影的夹角).

4. U_1, U_2 是 V 的子空间. 证明: $(U_1 \cap U_2)^\perp = U_1^\perp + U_2^\perp$.

5. 证明: n 阶正交矩阵 A 的特征多项式 $\chi_A(t)$ 具有性质: $t^n \chi_A(1/t) = \pm \chi_A(t)$.

6. (选做) 设 V 是 n 维欧式空间, $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n \in V$. 证明下列断言等价:

   (i) $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 是 V 的一组单位正交基;

   (ii) 对任意 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$, $(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n (\mathbf{x}|\mathbf{e}_i)(\mathbf{y}|\mathbf{e}_i)$;

   (iii) 对任意 $\mathbf{x} \in V$, $\|\mathbf{x}\|^2 = \sum_{i=1}^n (\mathbf{x}|\mathbf{e}_i)^2$.