

# 作业十五

2022 年 5 月 30 日

1. 求下面矩阵的若当标准形

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -15 \\ 1 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -6 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{C}).$$

2. 设  $V = \mathbb{R}[x]_{n+1} = \{f \in \mathbb{R}[x] \mid \deg(f) \leq n\}$ , 验证

$$(f|g) := \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) g\left(\frac{k}{n}\right)$$

定义了  $V$  上一个内积, 计算  $\|x\|$ .

3. 设  $V$  是欧氏空间,  $u, v \in V$ , 证明:

(a)  $\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$

(b) 若  $\|u\| = \|v\|$ , 则  $(u+v) \perp (u-v)$ .

4. (a) 计算矩阵  $(J_{2m}(0))^2 \in M_{2m}(\mathbb{C})$  的若当标准形, 其中  $m \in \mathbb{Z}^+$ .

(b) 计算矩阵  $(J_n(\lambda))^k \in M_n(\mathbb{C})$  的若当标准形, 其中  $\lambda \neq 0$ .

5. (选做题) 设  $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$  为线性映射, 证明: 若  $\mathcal{A}$  有  $k$  维不变子空间, 则  $\mathcal{A}$  有  $n-k$  维不变子空间, 其中  $n = \dim V$ . (提示: 利用方阵与其转置相似)