

第十四周习题

符号约定. 如果不加特殊声明, V 是域 F 上的有限维线性空间.

1. 设二阶复矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

计算 J_A , J_B 和 J_C .

2. 设复方阵 A 的特征多项式

$$\chi_A = (t-1)^4(t+1)^3t^2,$$

和极小多项式

$$\mu_A = (t-1)^3(t+1)^3t^2.$$

计算 J_A .

3. 设

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ a & 2 & 0 \\ b & c & -1 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{C}).$$

计算 J_A . (提示: 对 a, b, c 的取值分情况讨论)

4. (i) 已知道 $\chi_A(t) = (t-3)^4(t+2)$ 且 $\text{rank}(\mathcal{A} - 3\mathcal{E}) = 2$, 求出 J_A ;

(ii) 在 $\text{rank}(\mathcal{A} - 3\mathcal{E}) = 1, 3, 4$ 的情形, 能唯一地复原计算 J_A 吗?

5. 设 $A \in M_n(\mathbb{C})$. 证明: 如果 $\text{tr}(A^k) = 0, k = 1, 2, \dots, n$, 则 A 是幂零的.

6. (选做) 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, V 是 \mathcal{A} -循环的. 设 $\lambda \in \text{spec}_F(\mathcal{A})$. 证明: $\dim(V^\lambda) = 1$.