第十三周习题

1. 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ 在标准基下的矩阵是

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   计算 $\mathbb{R}[\mathcal{A}] \cdot \mathbf{v}$ 的一组基.

2. 设

$$A = \begin{pmatrix} J_2 & O_{2\times 3} \\ O_{3\times 2} & J_3 \end{pmatrix}, \quad \text{其中 } J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   把 A 看成 F^5 上的线性算子. 判断 F^5 是不是 A-循环的.

3. 设 $n = \dim(V)$, $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$. 证明: 如果 $\mathcal{A}^0, \mathcal{A}, \ldots, \mathcal{A}^{n-1}$ 在 F 上线性无关, 则 V 是 $\mathcal{A}$-循环的.

4. 设

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   计算 A^k.

5. 设 $A = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathrm{M}_n(F)$. 把 A 看成 F^n 上的线性算子, 证明: F^n 是 A-循环的当且仅当 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ 两两不同.

6. (选做)设 $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{L}(V)$, $\mathcal{A}$ 是循环算子, $\mathcal{AB} = \mathcal{BA}$. 证明: $\mathcal{B} \in F[\mathcal{A}]$.