第十二周习题

1. 判断实矩阵
$$A=\begin{pmatrix}-1 & 3 & -1\\ -3 & 5 & -1\\ -3 & 3 & 1\end{pmatrix}$$
是否可对角化. 如果可以, 求对角矩阵 B 使得 $A\sim_s B$.

2. 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V), f\in F[t]$,

   (i) 设 λ 是 $\mathcal{A}$ 的特征值, 证明: $f(\lambda)$ 是 $f(\mathcal{A})$ 的特征值;

   (ii) 设 $\mathbf{v}$ 是 $\mathcal{A}$ 的特征向量, 证明: $\mathbf{v}$ 也是 $f(\mathcal{A})$ 的特征向量.

3. 设:
$$C=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}\in \mathrm{M}_n(\mathbb{C}).$$

   (i) 证明: C 可对角化.

   (ii) 设 $f\in\mathbb{C}[t]$. 求 $\det(f(C))$.

4. 设
$$A=\begin{pmatrix}a & * & \cdots & *\\ 0 & a & \cdots & *\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & a\end{pmatrix}\in \mathrm{M}_n(F),$$
其中 $*$ 部分不全为零. 证明: A 不可对角化.

5. (选做) 设 $F=\mathbb{C}$, $\mathcal{A},\mathcal{B}\in\mathcal{L}(V)$ 满足 $\mathcal{A}\mathcal{B}=\mathcal{B}\mathcal{A}$. 证明: $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 有公共的特征向量.