第十一周习题

1. 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, U_1, U_2 是 $\mathcal{A}$-子空间. 证明: $U_1 + U_2$ 和 $U_1 \cap U_2$ 都是 $\mathcal{A}$-子空间.

2. 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ 满足 $\ker(\mathcal{A}) \oplus \mathrm{im}(\mathcal{A}) = V$. 证明: 存在 V 的一组基, 使得 $\mathcal{A}$ 在这组基下的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} B & O \\ O & O \end{pmatrix},$$

其中 $B \in \mathrm{M}_r(F)$ 满秩, $\mathrm{rank}(\mathcal{A}) = r$.

3. 计算

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$$

的所有实特征根和实特征向量.

4. 设

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C}),$$

   (i) 计算 μ_A 和 χ_A;

   (ii) 问在什么情况下, $\deg(\mu_A) < \deg(\chi_A)$.

5. 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ 满足 $\mathcal{A}^5 - \mathcal{A}^3 = 3\mathcal{A}$. 证明: 当 F 的特征不等于 3 时,

$$\ker(\mathcal{A}) \oplus \mathrm{im}(\mathcal{A}) = V.$$

6. (选做)证明: 如果 $\mathcal{A}$ 可逆, 则 $\mathcal{A}$ 的不变子空间也是 $\mathcal{A}^{-1}$ 的不变子空间. 特别地, $\mathcal{A}$ 的特征向量也是 $\mathcal{A}^{-1}$ 的特征向量.