第十周习题

1. (i) 设 $A, B \in \mathrm{M}_n(F)$. 证明: 如果 A 可逆, 则 $AB \sim_s BA$.

   (ii) 设 $A, B \in \mathrm{SM}_n(\mathbb{R})$ 正定. 证明: AB 相似于一个正定矩阵.

2. 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ 满足 $\mathcal{A}^2 = 2\mathcal{A} - \mathcal{E}$,

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

   $f = t^2 - 2 \in F[t]$. 计算 $f(\mathcal{A})$, $f(B)$ 和 μ_B.

3. 设

$$J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} J_2 & O \\ O & O \end{pmatrix}_{4\times 4},\ B = \begin{pmatrix} J_2 & O \\ O & E_2 \end{pmatrix}_{4\times 4},\ C = \begin{pmatrix} J_2 & O \\ O & \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}_{4\times 4}.$$

   计算 μ_A, μ_B 和 μ_C.

4. 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ 满足 $\mathcal{A}^2 = 2\mathcal{A} + 3\mathcal{E}$. 证明: 当 F 的特征不等于 2 时

$$\mathrm{rank}(\mathcal{A} + \mathcal{E}) + \mathrm{rank}(\mathcal{A} - 3\mathcal{E}) = \dim(V).$$

5. (选做) 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$. 证明下列结论.

   (i) $\ker(\mathcal{A}^0) \subset \ker(\mathcal{A}) \subset \ker(\mathcal{A}^2) \subset \cdots$ 和 $\mathrm{im}(\mathcal{A}^0) \supset \mathrm{im}(\mathcal{A}) \supset \mathrm{im}(\mathcal{A}^2) \supset \cdots$.

   (ii) 存在 $k \in \mathbb{N}$, 使得 $\ker(\mathcal{A}^k) = \ker(\mathcal{A}^{k+1})$. 此时对任意 $i \in \mathbb{N}$, 有

$$\ker(\mathcal{A}^k) = \ker(\mathcal{A}^{k+i}) \quad 和 \quad \mathrm{im}(\mathcal{A}^k) = \mathrm{im}(\mathcal{A}^{k+i}).$$

   (iii) 设 k 如 (ii) 所述. 则 $\ker(\mathcal{A}^k) \oplus \mathrm{im}(\mathcal{A}^k) = V$.