第九周习题

1. 设 V 的一组基是 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, W 的一组基是 ϵ_1, ϵ_2. 线性映射 ϕ 由

$$\phi(\mathbf{e}_1) = \epsilon_1 - \epsilon_2, \quad \phi(\mathbf{e}_2) = \epsilon_1 + \epsilon_2, \quad \phi(\mathbf{e}_3) = \epsilon_2 - 2\epsilon_1.$$

确定.

(i) 计算 ϕ 在上述基底下的矩阵;

(ii) 计算 $\mathrm{rank}(\phi)$ 和 $\ker(\phi)$ 的一组基;

(iii) 设 $\mathbf{v}_1 = 2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$, $\mathbf{v}_2 = 2\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$, $\mathbf{v}_3 = \mathbf{e}_1$; $\mathbf{w}_1 = \epsilon_1 - \epsilon_2, \mathbf{w}_2 = \epsilon_1 + \epsilon_2$. 证明: $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ 是 V 的一组基, $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ 是 W 的一组基. 并计算 ϕ 在 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3; \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ 下的矩阵.

2. 设 $C \in \mathrm{GL}_n(F)$, $\mathcal{A} : \mathrm{M}_n(F) \longrightarrow \mathrm{M}_n(F)$ 由公式 $\mathcal{A}(X) = C^{-1}XC$ 给出.

(i) 验证 $\mathcal{A}$ 是 $\mathrm{M}_n(F)$ 上的线性算子.

(ii) 验证对任意 $X, Y \in \mathrm{M}_n(F)$, $\mathcal{A}(XY) = \mathcal{A}(X)\mathcal{A}(Y)$.

(iii) 求 $\mathrm{rank}(\mathcal{A})$.

3. 计算矩阵 $T \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ 中, 使得

$$T^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. (选做) 设 $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{L}(V)$. 证明:

(i) $\mathrm{rank}(\mathcal{A}) = \mathrm{rank}(\mathcal{B}\mathcal{A}) + \dim(\mathrm{im}(\mathcal{A}) \cap \ker(\mathcal{B}))$.

(ii) 对任意 $i \in \mathbb{Z}^+$, $\dim(\mathrm{im}(\mathcal{A}^{i-1}) \cap \ker(\mathcal{A})) = \dim(\ker(\mathcal{A}^i)) - \dim(\ker(\mathcal{A}^{i-1}))$.