

第八周习题

1. 设 $A \in \text{SM}_n(\mathbb{R})$ 且 $\det(A) < 0$. 证明: 存在 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ 使得 $\mathbf{x}^t A \mathbf{x} < 0$.
2. 设 $q = (x_1 + x_2)^2 + 3(x_1 - x_3)^2 + 2(2x_1 + x_2 - x_3)^2 + 5(3x_1 + x_2 - 2x_3)^2$ 是 \mathbb{R}^3 上的二次型. 求 q 的签名.
3. 设 $B \in \text{SM}_{n-1}(\mathbb{R})$ 正定, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n-1}$, 且 $a \in \mathbb{R}$. 令

$$A = \begin{pmatrix} B & \mathbf{v} \\ \mathbf{v}^t & a \end{pmatrix},$$

证明: 如果 $\det(A) = 0$, 则 A 半正定.

4. (选做) 设 A 是实对称矩阵, E 是同阶单位矩阵, ϵ 是充分小的实数. 证明: 方阵 $E + \epsilon A$ 是正定的.