

第七周习题

1. 设 $q(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 - 2x_2x_3$ 是 \mathbb{R}^3 上二次型, 计算 q 的签名.

2. 设

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \text{SM}_2(\mathbb{R}).$$

(i) 是否存在 $P \in \text{GL}_2(\mathbb{R})$, 使得 $S = P^t P$? 如果存在计算一个这样的矩阵 P .

(ii) 是否存在 $P \in \text{GL}_2(\mathbb{C})$, 使得 $S = P^t P$? 如果存在计算一个这样的矩阵 P .

3. 实二次型

$$\lambda x_1^2 - 2x_2^2 - 3x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3,$$

在 λ 取什么值时是负定的.

4. 设

$$\begin{aligned} q: M_n(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ X &\longmapsto \text{tr}(X^t X). \end{aligned}$$

证明 q 是 $M_n(\mathbb{R})$ 上的二次型并求 q 的签名.

5. 设 $A \in \text{SM}_n(\mathbb{R})$ 正定. 证明: 对于任意 $m \in \mathbb{Z}$, A^m 正定.

6. (选做) 设 V 是 n 维实空间, $f_1, \dots, f_{s+t} \in V^*$. 证明:

$$q = f_1^2 + \dots + f_s^2 - f_{s+1}^2 - \dots - f_{s+t}^2,$$

是二次型. 再设 k 是 q 的正惯性指数. 证明: $s \geq k$.