第六周习题

1. 设 V 是域 F 上的有限维线性空间, $g, h \in V^*$. 函数 $f: V \times V \longrightarrow F$ 由公式

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = g(\mathbf{x})h(\mathbf{y})$$

定义.

(i) 验证 $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 是双线性型;

(ii) 计算 $\mathrm{rank}(f)$;

(iii) 验证 $q(\mathbf{x}) = g^2(\mathbf{x})$ 是 V 上的二次型.

2. 设 $q(\mathbf{x}) = x_1^2 - x_1x_2 + 3x_3x_2 + 10x_4x_3 - 2x_4^2$ 是 $\mathbb{Q}^4$ 上的二次型. 计算 q 在标准基下的矩阵和 $\mathrm{rank}(q)$.

3. 设 $q(\mathbf{x}) = x_1^2 - 3x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$ 是 $\mathbb{R}^3$ 上二次型. 计算 q 的一组规范基和在该基下的规范型.

4. 设 p 和 q 是 $\mathbb{C}^n$ 上两个二次型，它们在标准基下的矩阵分别为 A 和 B. 证明：$A \sim_c B$ 当且仅当 $\mathrm{rank}(p) = \mathrm{rank}(q)$.

5. 设 V 是 F 上的 n 维向量空间, $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 是 V 上非退化双线性型(非退化双线性型是指双线性型满足 $\mathrm{rank}(f) = n$). 证明：

$$\begin{array}{rccc} \phi: & V & \longrightarrow & V^* \\ & \mathbf{v} & \mapsto & f(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \end{array}$$

是线性同构.

6. (选做) 设 F 是特征不等于 2 的域, V 是 F 上的 n 维线性空间, $f_1, \ldots, f_k \in V^*$. 设映射 $q: V \longrightarrow F$ 由公式 $\forall \mathbf{x} \in V$, $q(\mathbf{x}) = f_1(\mathbf{x})^2 + \cdots + f_k(\mathbf{x})^2$. 证明: q 是 V 上的二次型且

$$\mathrm{rank}(q) \leq \dim\langle f_1, \ldots, f_k \rangle.$$