第五周习题

1. 设 $\mathbb{R}^4$ 上的双线性型由公式 $f(\mathbf{x},\mathbf{y}) = x_1y_1 - 3x_2y_3 + 2x_4y_1 + 5x_3y_2 - x_4y_4$ 定义, 其中 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^t$ 和 $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4)^t$. 求 f 在标准基下的矩阵和 $\mathrm{rank}(f)$.

2. 设
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$
计算 $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q})$ 和对角矩阵 B 使得 $P^tAP = B$.

3. 设 F 是域, 其特征不等于 2, V 是域 F 上的 n 维线性空间
   (i) 设 A 是 F 上 n 阶对称方阵. 证明: 如果对任意 $\mathbf{x} \in F^n$, 我们都有 $\mathbf{x}^tA\mathbf{x} = 0$, 则 A 是零方阵. *(提示: 利用极化公式或规范型)*
   (ii) 设 A 是 F 上 n 阶斜对称方阵. 证明: 对任意 $\mathbf{x} \in F^n$, 我们都有 $\mathbf{x}^tA\mathbf{x} = 0$.

4. 设齐次线性方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}_m$, 其中 $A \in F^{m\times n}$, $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^t$ 和 $\mathbf{0}_m$ 是 F^m 中的零向量. 令 $B \in F^{k\times n}$, 新的方程组为
$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0}_{m+k}.$$
设这两个方程组的解空间分别是 U 和 V. 证明 $\dim(V) \geq \dim(U) - k$.

5. 设 $A \in F^{m\times n}, B \in F^{n\times m}$, 其中 F 是域, 证明:
$$m - \mathrm{rank}(E_m - AB) = n - \mathrm{rank}(E_n - BA).$$

6. (选做) 设 V 是 F 上的 n 维线性空间, U 是 V 的 d 维子空间. 设
$$U^0 = \{f \in V^* \,|\, \forall\, \mathbf{u} \in U,\, f(\mathbf{u}) = 0\},$$
证明: $\dim(U^0) = n - d$.