第四周习题

（共两页）

1. 设 $\mathbb{Q}^3$ 中的三个向量

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

   计算 $V := \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle$ 的一组基和 $\mathbb{Q}^3/V$ 的一组基.

2. 在 $\mathbb{R}^3$ 中,设

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

   和

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

   求由基 $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ 到基 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ 的转换矩阵, 和 $\mathbf{w} = (1, 2, 3)^t$ 在 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ 下的坐标.

3. 设 $V = F[x]^{(d+1)}$, 其中 F 是一个域.

   (i) 证明：$\{1, x, x(x-1), \ldots, x(x-1)\cdots(x-d+1)\}$ 是 V 的一组基.

   (ii) 计算矩阵 P, 使得下式

$$(1, x, x(x-1), \ldots, x(x-1)\cdots(x-d+1)) = (1, x, \ldots, x^d)P$$

   成立.

   (iii) 设

$$\begin{array}{rccc} \triangle: & V & \longrightarrow & V \\ & p(x) & \mapsto & p(x+1) - p(x) \end{array}$$

   求 $\triangle$ 在基底

$$\{1, x, x(x-1), \ldots, x(x-1)\cdots(x-d+1)\}$$

   下的矩阵.

   (iv) 求 $\dim(\ker(\triangle))$ 和 $\dim(\mathrm{im}(\triangle))$.

4. 设 $\pi_1, \cdots, \pi_k \in \mathrm{Hom}(V, V)$ 满足

(a) $\forall i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, $\pi_i^2 = \pi_i$.

(b) $\forall i, j \in \{1, 2, \ldots, k\}, i \neq j$, $\pi_i \pi_j = \mathcal{O}$.

(c) $\pi_1 + \cdots + \pi_k = \mathcal{E}$.

其中 $\mathcal{O}$ 和 $\mathcal{E}$ 分别代表 $\mathrm{Hom}(V, V)$ 中从 V 到 V 的零映射和恒同映射. 证明：

(i)

$$V = \mathrm{im}(\pi_1) \oplus \cdots \oplus \mathrm{im}(\pi_k).$$

(ii) 设 $\rho_i : V \longrightarrow V$ 是关于上述直和从 V 到 $\mathrm{im}(\pi_i)$ 的投影, 则 $\rho_i = \pi_i, i = 1, 2, \ldots, k$.

[注：满足上述条件 $(a), (b), (c)$ 的 $\pi_1, \ldots, \pi_k$ 称为完全正交等方组]

5. (选做)设 V 是域 F 上的 n 维子空间, $V_1, \ldots, V_k$ 是 V 的子空间. 证明：如果

$$\dim(V_1) + \cdots + \dim(V_k) > n(k-1),$$

则 $V_1 \cap \cdots \cap V_k \neq \{\mathbf{0}\}$.