第三周习题

1. 在 $\mathrm{Map}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ 中, 用 V_1, V_2 分别表示偶函数和奇函数组成的集合, 证明：

   (i) V_1, V_2 都是 $\mathrm{Map}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ 的子空间;

   (ii) $\mathrm{Map}(\mathbb{R},\mathbb{R}) = V_1 \bigoplus V_2$.

2. (i) 设 $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x) \in C^{(n-1)}[a,b]$, 令

$$W(x) = \det \begin{pmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix},$$

   称 $W(x)$ 是 $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ 的 n 阶 *Wronskian* 行列式.证明：如果存在 $x_0 \in [a,b]$, 使得 $W(x_0) \neq 0$, 则 $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ 线性无关.

   (ii) 在 $\mathrm{Map}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ 中, 判断 $e^{ax}\sin bx, e^{ax}\cos bx$, (其中 $a, b \in \mathbb{R}$) 是否线性无关.

3. 设 V 是域 F 上的线性空间, $V_1, \ldots, V_k$ 是其子空间, 且

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k.$$

   对 $i \in \{1, \ldots, k\}$, 定义映射

$$\begin{array}{rccc} \pi_i: & V & \longrightarrow & V \\ & \mathbf{x} & \mapsto & \mathbf{x}_i, \end{array}$$

   其中 $\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{k} \mathbf{x}_j$, $\mathbf{x}_j \in V_j$.

   (i) 验证: 每个 π_i 都是线性映射(称为从 V 到 V_i 关于上述直和的投影).

   (ii) 证明: 每个 π_i 都有 $\pi_i^2 = \pi_i$ (称为等方性), 其中 $\pi_i^2 := \pi_i \circ \pi_i$.

   (iii) 证明: 每个 $i, j \in \{1, 2, \ldots, k\}, i \neq j$ 都有 $\pi_i \pi_j = \mathcal{O}$ (称为正交性), 其中, $\pi_i \pi_j := \pi_i \circ \pi_j$, 映射 $\mathcal{O}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ 对任意 $\mathbf{x} \in V$ 都成立.

   (iv) 证明: $\pi_1 + \pi_2 + \cdots + \pi_k = \mathcal{E}$, 其中映射 $\mathcal{E}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ 对任意 $\mathbf{x} \in V$ 都成立.

   (提示: 参见科斯特利金第二卷第三节第一部分, pages 57–58).

4. 设域 F 的特征为 0,

   (i) V_1, V_2 是域 F 上的线性空间 V 的两个真子空间. 证明: 在 V 中存在 $\mathbf{v}$, 使得 $\mathbf{v} \notin V_1, \mathbf{v} \notin V_2$ 同时成立.

   (ii) （选做）任何一个域 F 上的线性空间不能表示成有限个真子空间的并.