第十六次作业

1. 设 F 是一个域, $a, b \in F$ 且 $a \neq 0$. 设 $f = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 \in F$. 证明 $\deg(f(x))$ =$\deg(f(ax+b))$, 并计算 $(f(ax+b))$ 的首项系数.

2. 多项式 $f(X) = X^5 + 3X^4 + X^3 + 4X^2 - 3X - 1, g(X) = X^2 + X + 1$ 可以看作环 $\mathbb{Z}[X]$ 中的多项式或者 $\mathbb{Z}_5[X]$ 中的多项式. 用带余除法, 证明在第一种情况下 $f(X)$ 不被 $g(X)$ 整除, 并计算 $quo(f, g, X), rem(f, g, X)$; 而在第二种情况下,$f(X)$ 可以被 $g(X)$ 整除. 与此相反的情况可能出现吗?

3. 设 $f(x) = x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2) \in \mathbb{Z}[X]$ 分别求

   (1) $f(2)$,

   (2) $f(\bar{a}), \bar{a} \in \mathbb{Z}_3[X]$,

   (3) $f(A), A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4. 多项式 $x^2 - 2$ 在 $\mathbb{Z}_8$ 中有多少个根?

5. 设 F 是域

   (1) 设 $a, b \in F$ 且 $a \neq 0$. 证明: 映射

   $$\begin{aligned} \phi_{a,b} : F[x] &\longrightarrow F[x] \\ p(x) &\longmapsto p(ax+b) \end{aligned}$$

   是从 $F[x]$ 到 $F[x]$ 的环同构.

   (2) 设 $\sigma : F[x] \longrightarrow F[x]$ 是环同构且 $\sigma|_F = id_F$. 证明: 存在 $a, b \in F$ 且 $a \neq 0$ 使得 $\sigma = \phi_{a,b}$.