作业十五

2021 年 12 月 15 日

1、 证明任意有限整环 R 是一个域.

2、 设 p 是一个素数, R 是有单位元的交换环, 使得任取 $x \in R$, $px = 0$. 证明

$$(x+y)^{p^m} = x^{p^m} + y^{p^m}$$

对任意 $x, y \in R$ 成立.

3、 环 R 的非零元素 x 称为幂零的, 若存在 $n \in N$, 使得 $x^n = 0$. 证明:

i) 若 R 是任意有单位元的环, x 是幂零元, 则 $1 - x$ 是可逆元;

ii) 环 $\mathbb{Z}_m = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ 包含幂零元当且仅当 m 可以被一个大于 1 的整数的平方整除.

4、 设 F 是一个域,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in M_4(F).$$

根据 F 的特征,

i) 讨论 $\mathrm{rank}(A)$ 的取值;

ii) 设 $\phi_A : F^4 \to F^4$ 是以 A 为矩阵的线性映射, 求 $\ker(\phi_A)$ 和 $\mathrm{im}(\phi_A)$.

5、 证明矩阵 $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, 其中 $a, b \in \mathbb{Z}_3$, 在矩阵加法乘法下, 构成一个 9 元域, 而这个域的乘法群是 8 阶循环群.

[选做题]

6、 证明如下命题:

i) 有限交换群中存在一个元素, 其阶是所有元素的最小公倍数.

ii) 设 G 是有限交换群, 则 G 是循环群的充分必要条件是对于任一正整数 m, $x^m = e$ 在 G 中最多有 m 个解.

7、 证明 A_4 没有 6 阶子群.