作业十四

2021 年 12 月 12 日

1、设 G 是一个群, $a, b \in G$ 满足 $ab = ba$. 若 a, b 有互素的阶 s, t, 证明: 元素 ab 的阶为 st 且 $\langle a, b\rangle = \langle ab\rangle$.

2、设 G 是一个幺半群, 使得任取 $a, b \in G$, 方程 $ax = b, ya = b$ 有唯一解, 证明: G 是一个群.

3、证明:

i) 所有四阶群都是阿贝尔群, 精确到同构只有置换群 $U = \langle(1234)\rangle$ 和克莱因四元群 V_4 两种.

ii) 所有阶数小于等于 5 的群都是阿贝尔群.

iii) 存在 6 阶非阿贝尔群.

4、写出正有理数乘法群 $(\mathbb{Q}_+, \cdot)$ 的一个生成元集. 在 $(\mathbb{Q}_+, \cdot)$ 中是否存在有限生成元集?

5、设群 G 是一个有限 (乘法) 群, H 是 G 的一个非空子集, 如果 H 关于 G 的乘法封闭, 证明: H 是一个子群.

[选做题]

6、设 G, H 为两个群, 单位元分别为 e_G, e_H, 设 $\phi : G \to H$ 为群同态.

i) $g, g' \in G$, 定义 $g \sim g'$ 当且仅当 $g{g'}^{-1} \in \ker\phi$. 证明:$\sim$ 是一个等价关系.

ii) 在 i) 的等价关系下, 证明 $(G/\sim, \cdot)$ 是一个群, 其中 $\bar{g} \cdot \bar{g'} = \overline{g \cdot g'}$

iii) 证明: $\bar{\phi} : (G/\sim, \cdot) \to H$, $\bar{\phi}(\bar{g}) = \phi(g)$ 是一个群同态.

iv) 证明: $\bar{\phi}$ 是一个单射, $\mathrm{im}(\phi) = \mathrm{im}(\bar{\phi})$, 有 $(G/\sim, \cdot) \cong \mathrm{im}(\phi)$.