作业十三

2021 年 12 月 1 日

1、设 A 为一 n 阶方阵, 用 $\mathrm{rank}(A)$ 表示 $\mathrm{rank}(A^\vee)$.

2、证明: 若 A, B, C, D 为 n 阶方阵, $\det(A) \neq 0$, 则

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - ACA^{-1}B) = \det(A) \cdot \det(D - CA^{-1}B).$$

此外, 验证:

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{cases} \det(AD - CB), \text{ 若} AC = CA, \\ \det(DA - CB), \text{ 若} AB = BA. \end{cases}$$

3、证明集合:

$$M_n^0(\mathbb{R}) = \left\{ A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R}) | \sum_j^n a_{ij} = 0, i = 1, 2, \ldots, n \right\}$$

在矩阵通常乘法下运算下构成一个半群. $\left(M_n^0(\mathbb{R}), \cdot\right)$ 是幺半群吗?

4、设 $p = 3$, 写出 $\mathbb{Z}_p$ 的加法与乘法表. 证明:$\mathbb{Z}_p^\times := \mathbb{Z}_p \backslash \{\bar{0}\}$ 关于乘法构成一个群. 另验证否存在一个元素 $a \in \mathbb{Z}_p^\times$ 使得 $\{a^i | i \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z}_p^\times$. (注: 此题结论对一般素数 p 均成立.)

5、设 G, H 为两个群, 单位元分别为 e_G, e_H, 设 $\phi : G \to H$ 为群同态, 记 $\ker(\phi) = \{g \in G | \phi(g) = e_H\}$. 证明:

i) $\ker(\phi)$ 为 G 的一个子群;

ii) $g \ker(\phi) = \ker(\phi) g$ 对任意 $g \in G$ 成立, 其中 $g \ker(\phi) = \{gg' | g' \in \ker(\phi)\}$, $\ker(\phi) g = \{g'g | g' \in \ker(\phi)\}$;

iii) ϕ 是单射当且仅当 $\ker(\phi) = \{e_G\}$.

[选做题]

6、证明若 $|G|$ 为偶数, 则必有元素 $g \neq e$ 满足 $g^2 = e$. (提示:$g^2 \neq e$ 则 $(g^{-1})^2 \neq e$.)