作业十二

2021 年 11 月 18 日

[本次作业共两页]

1、 给定实数域 $\mathbb{R}$ 上 n 阶方阵 A, B, 设

$$X = \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix},$$

证明 $|X| = |A+B| \cdot |A-B|$.

2、 计算下面 n 阶矩阵的行列式:

$$A = \begin{pmatrix} x+y & xy & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & x+y & xy & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x+y & xy & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & x+y & xy \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & x+y \end{pmatrix}.$$

(提示: 展开归纳.)

3、 证明伴随矩阵具有如下性质:

$$(\lambda A)^\vee = \lambda^{n-1} A^\vee; \quad (A^t)^\vee = (A^\vee)^t.$$

4、 设 $A = (a_{ij})$ 为 n 阶矩阵, 且任取 $i \neq j$, 有 $(n-1)|a_{ij}| < |a_{ii}|$. 证明: $|A| \neq 0$.

推荐扩展阅读: 对角占优矩阵.

5、 在平面直角坐标系内给定二次曲线

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2b_1 x + 2b_2 y + c = 0.$$

证明:

$$F = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & b_2 \\ b_1 & b_2 & c \end{vmatrix}$$

是坐标变换

$$\begin{cases} x = \cos\theta \cdot x' - \sin\theta \cdot y' \\ y = \sin\theta \cdot x' + \cos\theta \cdot y' \end{cases}$$

的不变量.

(换句话说，坐标变换后，有曲线 $a'_{11}{x'}^2 + 2a'_{12}x'y' + a'_{22}{'}^2 + 2b'_1x' + 2b'_2y' + c' = 0$, 与 $F' = \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & b'_1 \\ a'_{12} & a'_{22} & b'_2 \\ b'_1 & b'_2 & c' \end{vmatrix}$, 证明:$F' = F$).

[思考题 (困难)]

6、证明伴随矩阵有性质 $(AB)^\vee = B^\vee \cdot A^\vee$.(提示: 考虑矩阵 $E_n + \epsilon A$, ϵ 充分小.)

[选做题 (不提交)]

7、查找资料或自行证明科斯特利金第二版 p109 第 6 题 (Binet-Cauchy 公式) 与 p110 第 8 题 (Laplace 展开式).