作业十

2021 年 11 月 11 日

[本次作业共两页]

1、 计算下面行列式:

$$|A| = \begin{vmatrix} -2 & 5 & -1 & 3 \\ 1 & -9 & 13 & 7 \\ 3 & -1 & 5 & -5 \\ 2 & 8 & -7 & -10 \end{vmatrix}, \quad |B| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}, \quad |C|, C = (c_{ij})_{n\times n}, c_{ij} = \max\{i, j\}.$$

2、 计算下面 $n+1$ 阶矩阵的行列式:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & n & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & n+1 \end{pmatrix}.$$

3、 给定实数域上的 n 阶方阵

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix},$$

其中 $a_{ij}(t)$ 为开区间 (a, b) 上的可微函数. 证明: $|A(t)|$ 为 (a, b) 上的可微函数, 且

$$\frac{d}{dt}|A(t)| = \sum_{i=1}^{n} |A_i(t)|,$$

其中

$$A_i(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{d}{dt}a_{i1}(t) & \frac{d}{dt}a_{i2}(t) & \cdots & \frac{d}{dt}a_{in}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}.$$

4、 设 A, B, C 分别为 $m \times n, n \times p, p \times q$ 矩阵. 证明:

$$\operatorname{rank}(AB) + \operatorname{rank}(BC) \leq \operatorname{rank}(ABC) + \operatorname{rank}(B).$$

(提示: 考虑分块矩阵 $\begin{pmatrix} AB & 0 \\ B & BC \end{pmatrix}$.)

5、 给定实数域 $\mathbb{R}$ 上 n 阶方阵

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix}$$

其中 A_1 为 r 阶方阵, 如果 A 与 A^t 可交换, 证明: $A_2 = 0$.

[选做题]

6、 整数 1798,2139,3255,4867 可以被 31 整除, 不用计算, 证明下面行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 7 & 9 & 8 \\ 2 & 1 & 3 & 9 \\ 3 & 2 & 5 & 5 \\ 4 & 8 & 6 & 7 \end{vmatrix}$$

可以被 31 整除.