

作业九

2021 年 11 月 2 日

1、计算下面矩阵乘法：

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n ; \quad (2) \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}^n ; \quad (3) \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}_{n \times n}^n .$$

2、设 A, B 为 \mathbb{R} 上的 n 阶对称方阵 i.e. $A^t = A, B^t = B$, 其中 A^t 为 A 的转置. 证明: AB 是对称矩阵当且仅当 $AB = BA$.

3、 A, B, C 为 n 阶方阵, 若 $ABC = 0$, 证明:

$$\text{rank}(A) + \text{rank}(B) + \text{rank}(C) \leq 2n,$$

并说明等号能否取到, 若能请举例.

4、 A, B 为 \mathbb{R} 上的方阵, 证明:

i) $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$;

ii) $\text{tr}(AA^t) \geq 0$, 且 $\text{tr}(AA^t) = 0$ 当且仅当 $A = 0$;

iii) 若 $A = A^t, B = B^t$, 则

$$\text{tr}((AB)^2) \leq \text{tr}(A^2B^2).$$

5、(1) 证明秩为 r 的矩阵可以写成 r 个秩为 1 的矩阵之和, 但不能是小于 r 个秩为 1 矩阵之和.

(2) 设 A 为一个 $m \times n$ 阶矩阵, 秩为 1, 证明: 存在 C 为 $m \times 1, D$ 为 $1 \times n$ 阶矩阵, 使得 $A = CD$.