第八次作业

1. 设 $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ 是线性映射并且是双射,φ^{-1} 是 φ 的逆映射, 证明以下结论:

   (1) φ^{-1} 是线性映射;

   (2) $n = m$.

2. 设 $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ 是线性映射, 并且满足对任意的 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \varphi(\mathbf{x}) \in \langle \mathbf{x} \rangle$. 证明: 存在 $\lambda \in \mathbb{R}$ 使得对任意的 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \varphi(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{x}$.

3. 定义映射

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_3 \\ x_2 + x_3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

   (1) 证明 φ 是线性映射;

   (2) 求 φ 在标准基下的矩阵;

   (3) 计算 $ker(\varphi)$ 和 $im(\varphi)$ 的维数

   (4) 分别计算 $ker(\varphi)$ 和 $im(\varphi)$ 的一组基底.

4. 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 0 & 10 & 11 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 7 & -1 & 0 \\ -2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

   计算 $3A - 2B, 2C + 3B$.

   [选做题]

5. 设映射 $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m : \vec{x} \mapsto \begin{pmatrix} f_1(\vec{x}) \\ f_2(\vec{x}) \\ \cdots \\ f_m(\vec{x}) \end{pmatrix}$. 求证:$\varphi$ 是线性映射 $\Leftrightarrow f_1, f_2, \cdots, f_m$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的线性函数.