第七次作业

注：本次作业共两页.

1. 在下述映射中, 哪些是线性映射:

   (1) $[x_1, x_2, \cdots, x_n] \mapsto [x_n, x_2, \cdots, x_1]$,

   (2) $[x_1, x_2, \cdots, x_n] \mapsto [x_1, x_2^2, \cdots, x_n^n]$,

   (3) $[x_1, x_2, \cdots, x_n] \mapsto [x_1, x_1 + x_2, \cdots, x_1 + x_2 + \cdots + x_n]$.

2. 计算

(1) 求下述数域 $\mathbb{R}$ 上齐次线性方程组解空间的一组基, 并且写出它的全部解.

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + x_5 = 0, \\ -2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 - 4x_5 = 0, \\ -x_1 - 7x_2 + 9x_3 - 4x_4 - 5x_5 = 0, \\ 3x_1 - 14x_2 + 22x_3 - 9x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$$

(2) 求下述数域 $\mathbb{R}$ 上非齐次线性方程组的全部解.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 & = -5, \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 + 6x_4 & = -1, \\ -5x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 & = 11, \\ -9x_1 - 4x_2 - x_3 & = 17. \end{cases}$$

3. 设 $A \in \mathbb{R}^{5\times 7}$, 并且以 A 为系数矩阵的齐次线性方程组解空间 V_A 的基底由 3 个向量组成, 求 $rank(A)$. 问:V_A 的维数可能是 1 吗?

4. 证明:

   (1) 矩阵加一行, 则秩或者不变或者增加 1;

   (2) 矩阵 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 且 $rank(A)$=r, 则 A 的任意 s 行可组成一个秩不小于 $r + s - m$ 的矩阵.

5. 设两个矩阵

$$A=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n\\ \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n\\ \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n\\ \gamma_1 & \gamma_2 & \cdots & \gamma_n\end{pmatrix},$$

试用平面上 n 条直线所成集合的几何性质给出 A 和 B 有相等秩的条件.

[选做题]

6. 设 $\mathbf{A},\mathbf{B}$ 分别是数域 $\mathbb{R}$ 上 $s\times n, l\times m$ 矩阵, 证明:

   (1) 如果 $rank(\mathbf{A})$=s,$rank(\mathbf{B})$=l, 那么

$$rank\begin{pmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{C}\\ \mathbf{0} & \mathbf{B}\end{pmatrix}=rank(\mathbf{A})+rank(\mathbf{B}).$$

   (2) 如果 $rank(\mathbf{A})$=n,$rank(\mathbf{B})$=m, 那么

$$rank\begin{pmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{C}\\ \mathbf{0} & \mathbf{B}\end{pmatrix}=rank(\mathbf{A})+rank(\mathbf{B}).$$