第六次作业

注：本次作业共两页.

1. 求以下矩阵的所有行向量的极大线性无关组, 以及所有列向量的极大线性无关组, 并计算其行秩与列秩.

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

2. 在 $\mathbb{R}^4$ 中, 设

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}, \alpha_5 = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix},$$

   (1) 证明:α_1, α_2 线性无关;

   (2) 把 α_1, α_2 扩充成向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ 的一个极大线性无关组, 并判断此极大线性无关组是否是 $\mathbb{R}^4$ 的一组基. 若是, 请计算剩余的一个向量由这组基线性表出的系数.

3. 设向量组 S 生成子空间 $V = \langle S \rangle \subseteq \mathbb{R}^n, dim(V) = d$, 若 S 有一个子集 $S_0 = \{v_1, v_2, \cdots, v_t\}$ 满足 $\langle v_1, v_2, \cdots, v_t \rangle = V$ 证明 $t \geq d$. 并以此说明若 $t = d$, 则 $v_1, v_2, \cdots, v_t$ 线性无关.

4. 在 $\mathbb{R}^n$ 中，令

$$U = \{ \begin{pmatrix} a_1 \\ \cdots \\ a_r \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix} | a_i \in \mathbb{R}, i = 1, \cdots, r \}.$$

其中 $r < n$. 求子空间 U 的一个基和维数.

5. 设 $V, W \subset \mathbb{R}^n (n > 1)$ 是子空间, 并且 $V \neq W$ 和 $dim(V) = dim(W) = n - 1$, 证明

$$dim(V + W) = n \text{ 和 } dim(V \cap W) = n - 2.$$

[思考题]

6. 在数域 $\mathbb{R}$ 上的线性空间 V 中,s 个向量的向量组, 它的极大线性无关组含有 $s - 1$ 个向量, 且包含成比例的非零向量. 试问: 此向量组有多少个极大线性无关组?