第五次作业

注：本次作业共两页.

1. 运用二项式定理, 对 n 做归纳证明, 若 p 是素数, 则 $n^p - n$ 对任意 $n \in \mathbb{Z}$ 可以被 p 整除.

2. 在 $\mathbb{R}^4$ 中, 判断向量 β 能否由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出; 若能, 则写出它的一种表出方式.

(1)

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ -1 \\ -25 \end{pmatrix},$$

(2)

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} -5 \\ -6 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} -8 \\ -3 \\ 7 \\ -10 \end{pmatrix}.$$

3. 在 $\mathbb{R}^4$ 中, 判断下列向量组是线性相关还是线性无关. 如果线性相关, 试找出其中一个向量, 使得它可以由其余向量线性表出, 并且写出它的一种表出式.

(1)

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(2)

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

4. 在数域 K 上的线性空间 V 中, 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关,

   (1) 判断向量组 $5\alpha_1 + 2\alpha_2, 7\alpha_2 + 5\alpha_3, 7\alpha_1 - 2\alpha_3$ 是否线性无关,

   (2) 向量组 $a_1\alpha_1 + b_2\alpha_2, a_2\alpha_2 + b_3\alpha_3, a_3\alpha_3 + b_1\alpha_1$ 线性无关的充分必要条件是:$a_1a_2a_3 \neq -b_1b_2b_3$.

5. 设 $\beta, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k \in \mathbb{R}^n$ 且 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$ 线性无关. 再设

$$\beta = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \cdots + a_k\alpha_k,$$

   其中 $a_1, a_2, \cdots, a_k \in \mathbb{R}$, 且 $a_1 \neq 0$. 证明:$\beta, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$ 线性无关.

6. 设 V, V_1, V_2 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间. 举例说明

$$V \cap (V_1 + V_2) = V \cap V_1 + V \cap V_2$$

   一般不成立.