第二次作业

注：本次作业共两页

1. 请用集合论语言来描述下述方程的解.

   (1) 线性方程组 L_A 由增广矩阵 A

   $$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 5 & 6 \\ -3 & 2 & 1 & -4 & 5 \\ -1 & 3 & -2 & 1 & 11 \end{pmatrix}$$

   确定. 计算 $\mathrm{sol}(L_A)$,

   (2) 齐次线性方程组 L_B 由系数矩阵 B

   $$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & -3 \\ 1 & -5 & 3 & 2 \\ 3 & -4 & 7 & -1 \\ 9 & -7 & 15 & 4 \end{pmatrix}$$

   确定,L_B 有无非零解? 若有, 计算 $\mathrm{sol}(L_B)$.

2. 验证

   $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

3. 证明如下结论.

   (1) 如果 X 是有限集，且变换 $f: X \longrightarrow X$ 是单射, 则 f 是双射,

   (2) 设映射 $f: X \longrightarrow Y$ 且 $V \subset Y$. 试求证:$f(f^{-1}(V)) \subset V$ 且 f 为满射当且仅当对 Y 中的任意子集 V 满足 $f(f^{-1}(V)) = V$,

   (3) 设 $f: X \longrightarrow Y$ 是一个映射，且 S, T 都是 X 的子集. 证明
   $f(S \cup T) = f(S) \cup f(T)$,$f(S \cap T) \subset f(S) \cap f(T)$.
   (思考: 是否可以举例说明后面一个式子不可以取等号.)

4. 集合 S 的全体子集的集合记作

$$\mathcal{P}(S) = \{T \mid T \in S\}.$$

若 S 含有 n 个元素 $(n < \infty)$, 则集合 $\mathcal{P}$ 的基数是多少?

5. 符号 $S \triangle T$ 表示两个集合的 S 和 T 对称差:$S \triangle T = (S \setminus T) \cup (T \setminus S)$. 证明：

$$S \triangle T = (S \cup T) \setminus (S \cap T).$$