

第一次作业

1. 判定下列两个线性方程组是否相容和是否确定:

$$(a) \begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_3 = 1 \end{cases}, \quad (b) \begin{cases} x_1 - x_2 = 1 \\ x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_3 = 1 \end{cases}.$$

2. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ 是实数, 且二次多项式 $p(x) = ax^2 + bx + c$ 满足

$$p(\alpha_i) = \beta_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

列出 $p(x)$ 的系数 a, b, c 满足的线性方程组并写出该方程组对应的系数矩阵和增广矩阵.

3. 设齐次线性方程组 H 有两组解 $x_1 = \alpha_1, \dots, x_n = \alpha_n$ 和 $x_1 = \beta_1, \dots, x_n = \beta_n$.
证明: 对任意实数 u, v ,

$$x_1 = u\alpha_1 + v\beta_1, \dots, x_n = u\alpha_n + v\beta_n$$

也是 H 的解.

4. 利用数学归纳法证明:

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \text{和} \quad \sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

5. 用两种不同的方法证明二项式定理:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k},$$

其中 $\binom{n}{k}$ 代表从 n 个物体中选 k 个的组合数, 也记为 C_n^k .

6. 设 3×4 矩阵

$$B = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -3 & \lambda_1 \\ -5 & -3 & 1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix},$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 是实数. 设 L 是以 B 为增广矩阵的线性方程组. 回答下列问题并说明理由:

(i) $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 需要满足什么条件才能使得 L 是相容的?

(ii) 是否存在 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 使得 L 是确定的?