作业二

2022 年 3 月 5 日

1. 设 $f = x^3 - 3x + 2 \in \mathbb{Q}[x]$, 求 f 的无平方部分. (见李老师讲义或第一周习题课讲义)

2. 设 $R = \mathbb{C}[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ 为多元多项式环. 记 $\epsilon_1, \cdots, \epsilon_n$ 为初等对称多项式. 设 $\varphi \in R$, 证明: $\varphi(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n)$ 为对称多项式.

3. 设 $z_1, z_2, z_2 \in \mathbb{C}$, 证明 $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$, 并说明其几何意义.

4. 证明:

   (i) 复平面 $\mathbb{C}$ 上的直线方程 (i.e. $Ax + By + C = 0$, $A, B, C \in \mathbb{R}$, $(A, B) \neq (0, 0)$, $z = x + \sqrt{-1}y$) 可以写成
   $$a\bar{z} + \bar{a}z = c \quad (a\text{是非零复常数}, c\text{是实常数}).$$

   (ii) 复平面 $\mathbb{C}$ 上的圆周方程 (i.e. $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $r > 0$, $z = x + \sqrt{-1}y$) 可以写成
   $$Az\bar{z} + \beta\bar{z} + \bar{\beta}z + C = 0$$
   其中, $A \neq 0$, A, C 为实数, $\beta \in \mathbb{C}$, 且 $|\beta|^2 > AC$.

5. 设 $\xi_1 = e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{n}}$, $\xi_i = \xi_1^i$, $i = 0, \cdots, n-1$. 验证:
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \xi_0 & \xi_1 & \cdots & \xi_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \xi_0^{n-1} & \xi_1^{n-1} & \cdots & \xi_{n-1}^{n-1} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{n} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \xi_0^{-1} & \xi_1^{-1} & \cdots & \xi_{n-1}^{-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \xi_0^{-(n-1)} & \xi_1^{-(n-1)} & \cdots & \xi_{n-1}^{-(n-1)} \end{pmatrix}$$

[选做题]

6. 第二题的逆命题也成立, 即若 f 为对称多项式, 则 $f = \varphi(\epsilon_1, \cdots, \epsilon_n)$, 其中 $\varphi \in R$ 是唯一确定的. 此定理被称为**对称多项式的基本定理**, 我们按如下步骤证明.

   定义 0.1. *在 R 中我们可以对单项式引入**字典序**, 称 $ax_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n} > bx_1^{j_1} \cdots x_n^{j_n}$ 如果数列 $i_1 - j_1, i_2 - j_2, \cdots, i_n - j_n$ 从左到右第一个非零的数为正. 那么, $\forall f \in R$, f 的单项式可按字典序由大到小排列, 排在第一项的称为 f 的**首项**.*

   (i) 设 $f, g \in R$, 证明: fg 的首项为 f 的首项与 g 首项的乘积.

(ii) 将 $a\epsilon_1^{i_1}\cdots\epsilon_n^{i_n}$ 展开为 $x_1,\cdots,x_n$ 的多项式后, 证明: 其首项为

$$ax_1^{i_1+i_2+\cdots+i_n}x_2^{i_2+\cdots+i_n}\cdots x_n^{i_n}.$$

(iii) 任给单项式 $f=x_1^{i_1}\cdots x_n^{i_n}$, $g=x_1^{j_1}\cdots x_n^{j_n}$, 证明: 若 $f\neq g$, 则 $f_\sigma\neq g_\sigma$ 对任意 $\sigma\in S_n$ 成立.

(iv) 设 f 为对称多项式, 若其按字典序排列的首项是 $ax_1^{i_1}x_2^{i_2}\cdots x_n^{i_n}$, 证明: $i_1\geq i_2\geq\cdots\geq i_n$.(提示: 反正法 + (ii))

(v) 若 f 为对称多项式, 则存在 $\varphi\in R$ s.t. $f=\varphi(\epsilon_1,\cdots,\epsilon_n)$. 请补全如下证明:

证明. (sketch) 设 f 的首项为 $a_0x_1^{i_1}\cdots x_n^{i_n}$, 则令 $f_1=f-a_0\epsilon_1^{i_1-i_2}\epsilon_2^{i_2-i_3}\cdots\epsilon_{n-1}^{i_{n-1}-i_n}\epsilon_n^{i_n}$. 则 f_1 也是对称多项式, 且 f_1 首项严格小于 f. 重复此操作, 可以在有限步终止. □

(vi) 证明: (v) 中的 φ 是唯一的. (提示: 考虑 φ 中单项式带入后的首项. 证明若 $\varphi(\epsilon_1,\cdots,\epsilon_n)=0$, 则 $\varphi=0$.)