第一次作业

February 25, 2022

1. 设F是域，$A \in M_n(F)$满足 $A^2 = A$. 证明: $\mathrm{rank}(A) + \mathrm{rank}(A - E) = n$. (提示: 利用上学期第十七讲第 2.4 节核核分解)

2. 设F是域，$f, g, h \in F[X]$. 证明: 若 $\gcd(f, h) = \gcd(g, h) = 1$, 则 $\gcd(fg, h) = 1$.

3. 判断$f(x) = 3x^3 + 15x + 10 \in \mathbb{Q}[X]$是否可约。

4. (i) 设$f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$. 若$\alpha = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$，$\gcd(a, b) = 1$，为其根. 证明: $a|a_0, b|a_n$.

   (ii) 判断:$g(x) = x^q + 4 \in \mathbb{Q}[X]$是否可约，其中 $q = 2$ 或 3 或4。

5. (i) 利用 $f(x) = x^p - x - 1$ 在 $\mathbb{Z}_p[x]$ 中不可约, 其中 p 为素数。证明: $f(x) = x^p - x - 1$ 与 $g(x) = x^p + (p-1)x + (p-1)$ 在 $\mathbb{Q}[X]$上不可约。

   (ii) (选做) 证明: $f(x) = x^p - x - 1$ 在 $\mathbb{Z}_p[x]$ 中不可约. (提示: 利用 $f(x) = f(x+1)$ 在 $\mathbb{Z}_p[x]$ 中成立)。

6. (选做题)

   定义 0.1 *设R是整环。如果存在$d: R \to \mathbb{N}^+$满足：对任意$a, b \in R$, 存在$q, r \in R$满足*

   $$a = qb + r, \quad r = 0 \text{ 或} d(r) < d(b),$$

   *则称R为***欧几里德环***(Euclidean Domain, ED)。*

   尝试完成:

   (i) 令$R = \mathbb{Z}[i] = \{m + ni | m, n \in \mathbb{Z}, i^2 = -1\}$, 证明: $d: m + ni \mapsto m^2 + n^2$使得$R$成为欧几里德整环。

   (ii) 尽可能多的列举你知道的欧几里德环。

   (iii) 证明: 欧几里德整环是唯一分解整环。

   注解 0.2 *由此，我们得到一类唯一分解整环。实践中，常见UFD有: 1、ED; 2、PID (Principal Ideal Domian) 3、ED, PID的多项式环。ED, PID, UFD 有如下严格包含关系：*

   $$\{EDs\} \subsetneq \{PIDs\} \subsetneq \{UFDs\}.$$

   有兴趣了解的同学可参考:《抽象代数I》赵春来，徐明曜编著，北京大学出版社。