§1. 正交变换、二次型的标准型和一点几何.

§1.1. $\mathbb{R}^n$ 赋予标准欧式内积，设 $q:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ 为二次型.

则 $\forall\ X=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^n$， $q(X)=X^tA\cdot X$. $A^t=A$.

由正规矩阵标准型，$\exists\ T\in O(n)$，s.t.

$$T^tAT=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$$ λ_i 为 A 的特征值

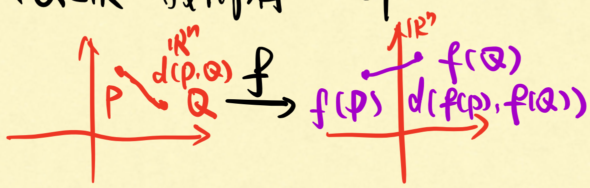
令 $X=T\cdot Y$ 则
$$\begin{aligned}q(X)&=(TY)^tA(TY)=q\circ T(Y)\\ &=Y^t\cdot T^tAT\cdot Y\\ &=\lambda_1y_1^2+\cdots+\lambda_ny_n^2\end{aligned}$$

即我们可以通过单位正交变换将二次型化为对角型.

§1.2. 在 $\mathbb{R}^n$ 中，我们可以定义任意两个点的距离，

$P=\begin{pmatrix}p_1\\ \vdots\\ p_n\end{pmatrix}$ $Q=\begin{pmatrix}q_1\\ \vdots\\ q_n\end{pmatrix}$
$$\begin{aligned}d(P,Q)&:=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(p_i-q_i)^2}\\ &=\sqrt{(P-Q\mid P-Q)}\end{aligned}$$

定义：称 $f:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^n$ 为欧氏空间上的保距映射如果对 $\forall\ P,Q\in\mathbb{R}^n$ 我们有 $d(P,Q)=d(f(P),f(Q))$.



命题：下面命题等价：

① $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ 为欧氏空间上的保距映射

② $f = T\cdot X + b$，$T \in O(n)$，$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ 为常值

(i.e. f 为仿射映射)

证明：② ⟹ ① 显然，直接计算即可.

① ⟹ ② 若 f 为 $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ 的保距映射.

令 $g(X) = f(X) - f(0)$，则 g 也为保距映射，且 $g(0) = 0$.

断言1. 对 $\forall\, P, Q \in \mathbb{R}^n$，$(P \mid Q) = (g(P) \mid g(Q))$.

$$\|g(P)\| = d(g(P), g(0)) = d(P, 0) = \|P\|$$

$$(g(P) \mid g(Q)) = -\frac{1}{2}\Big(\underbrace{\|g(P) - g(Q)\|^2}_{= d(g(P), g(Q))^2} - \|g(P)\|^2 - \|g(Q)\|^2\Big)$$

$$= -\frac{1}{2}\big(\underbrace{\|P - Q\|^2}_{= d(P, Q)} - \|P\|^2 - \|Q\|^2\big)$$

$$= (P \mid Q)$$

断言2. $g(\alpha P) = \alpha g(P)$，$\alpha \in \mathbb{R}$

$$d(g(\alpha P), \alpha g(P))^2 = (g(\alpha P) - \alpha g(P) \mid g(\alpha P) - \alpha g(P))$$

$$= (g(\alpha P) \mid g(\alpha P)) - 2\alpha\, (g(\alpha P) \mid g(P)) + \alpha^2 (g(P) \mid g(P))$$

$$= (\alpha p \mid \alpha p) - 2\alpha(\alpha p \mid p) + \alpha^2 (p \mid p)$$
$$= 0$$
$$\Rightarrow g(\alpha p) = \alpha g(p).$$

断言3. 对 $\forall p, Q \in \mathbb{R}^n$, $g(p+Q) = g(p) + g(Q)$

$$d(g(p+Q), g(p)+g(Q))^2$$
$$= (g(p+Q) - g(p) - g(Q) \mid g(p+Q) - g(p) - g(Q))$$

$$= (p+Q-p-Q \mid p+Q-p-Q)$$
$$= 0$$

断言2,3 $\Rightarrow$ g 为线性映射.

断言1 $\Rightarrow$ g 为正交映射. i.e. $g(X) = T \cdot X$, $X \in \mathbb{R}^n$, $T \in O(n)$

$\Rightarrow f(X) = g(X) + f(0) = TX + b$, 取 $b = f(0)$ 即可.

§1.3 一点几何

令 $H = \{X \in \mathbb{R}^n \mid q(X) = 1\} \subset \mathbb{R}^n$

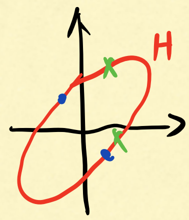
$q(X) = X^t \cdot A \cdot X$. 设 $T^t A T = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) = \Lambda$, $T \in O(n)$

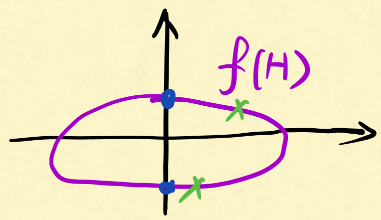
从保距映射角度看：

由 §1.2 ⟹ 在保距映射 $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ 下，$X \longmapsto T^t X = Y$

$$f(H) = \{ Y \in \mathbb{R}^n \mid Y^t \Lambda Y = 1 \quad \text{i.e. } \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2 = 1 \}$$

$n=2$ $\qquad \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f = T^t Y} \mathbb{R}^2$





从线性变换角度看：

取 $\mathbb{R}^n$ 标准基 $e_1, \cdots, e_n$，令

$(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n) = (e_1, \cdots, e_n) T$ 为一组新基.

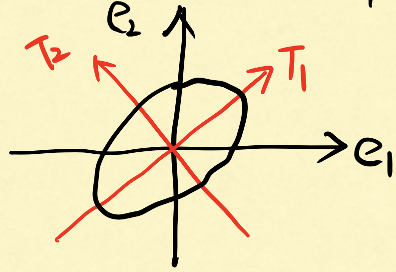
在基 $(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)$ 下，$v \in \mathbb{R}^n = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n) Y = (e_1, \cdots, e_n) T Y$

则 $q(v) = (TY)^t A (TY) = Y^t T^t A T Y = \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$

设 $T = (T_1, \cdots, T_n)$ $\quad T_i \in \mathbb{R}^n$，则 T_i 构成 $\mathbb{R}^n$ 的单位正交基.

在此基下，可以看出 $H = \{ X \in \mathbb{R}^n \mid q(X) = 1 \}$ 为"圆锥曲线".

eg $n=2$



由此可以看出，一个实对称 A，其特征向量表示"圆锥曲线" H 的"轴方向"，$\sqrt{\frac{1}{|\lambda_i|}}$ 表示"轴距"。

§1.4. 两个习题

1、求实二次型 $q(X)=n(\sum_{i=1}^{n}x_i^2)-(\sum_{i=1}^{n}x_i)^2$ 的标准形.

解：一般由 §1.1. 中方法计算，此题可由观察简单计算.

$\mathbb{R}^n$ 赋予标准欧式内积 (|)

令 $F=\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$

则 $q(X)=n(X|X)-(X|F)^2$.

其决定的双线性形 $f(X,Y)=\frac{1}{2}(q(X+Y)-q(X)-q(Y))$

$=n(X|Y)-(X|F)(Y|F)$

只要找到单位正交向量 $X_1,\cdots,X_n$，使得二次型 $f(X,Y)$ 对角化即可.

易知 $f(F|F)=n^2-n^2=0$

取 $M:=\langle F\rangle^{\perp}\subset\mathbb{R}^n$，则对 $\forall X,Y\in M$

$$f(X,Y)=n(X|Y).$$

如果我们对 M 中一组基按内积 (|) 做单位正交化

则双线性型 f 在 F 与 M 这组单位正交基下为对角形.

M 一组基为 $\varepsilon_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$ $\varepsilon_3=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$ $\cdots$, $\varepsilon_n\begin{pmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\-1\end{pmatrix}$ 为 M 一组基.

正交化

$$\mu_2=\varepsilon_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$$

$$\mu_3=\varepsilon_3-\frac{(\varepsilon_3|\mu_2)}{(\mu_2|\mu_2)}\cdot\mu_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\-1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$$

$$\mu_4=\varepsilon_4-\frac{(\varepsilon_4|\mu_3)}{(\mu_3|\mu_3)}\mu_3-\frac{(\varepsilon_4|\mu_2)}{(\mu_2|\mu_2)}\mu_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\\-1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$$

$\vdots$

$$\mu_i=\varepsilon_i-\frac{(\varepsilon_i|\mu_{i-1})}{(\mu_{i-1}|\mu_{i-1})}\mu_{i-1}-\cdots-\frac{(\varepsilon_i|\mu_2)}{(\mu_2|\mu_2)}\mu_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{i-1}\\\vdots\\\frac{1}{i-1}\\-1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$$

$\vdots$

$$\mu_n=\varepsilon_n-\frac{(\varepsilon_n|\mu_{n-1})}{(\mu_{n-1}|\mu_{n-1})}\mu_{n-1}-\cdots-\frac{(\varepsilon_n|\mu_2)}{(\mu_2|\mu_2)}\mu_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{n-1}\\\vdots\\\vdots\\\frac{1}{n-1}\\-1\end{pmatrix}$$

单位化

取 $\eta_i=\frac{\mu_i}{\|\mu_i\|}=\left(\frac{1}{\sqrt{i(i+1)}},\cdots,\frac{1}{\sqrt{i(i+1)}},\frac{-i}{\sqrt{i(i+1)}},0,\cdots,0\right)^t$

则 $\eta_2, \cdots, \eta_n$ 为 M 的一组单位正交基.

令 $T = \left(\frac{F}{\|F\|}, \eta_2, \cdots, \eta_n\right)$, $X = TY$

则 $q(Y) = q \circ T(Y) = n y_2^2 + \cdots + n y_n^2$. □

2. 设 $A, B \in SM_n(\mathbb{R})$, A 正定, 则 AB 特征值均为实数

证: A 正定, A^{-1} 也正定.

$\exists\, P \in GL_n(\mathbb{R})$ s.t. $P^t A^{-1} P = E_n$ 且 $P^t B P = C = \mathrm{diag}(a_1, \cdots, a_n)$
$C \in M_n(\mathbb{R})$

则 $C = E_n \cdot C = (P^t A^{-1} P)^{-1} \cdot P^t B P = P^{-1}(AB) \cdot P$

$\Rightarrow AB \sim_s C \Rightarrow A \cdot B$ 特征值为实数. □

另证明: $\exists\, P \in GL_n(\mathbb{R})$ s.t. $P^t A^{-1} P = E_n \Rightarrow P^t = (A^{-1}P)^{-1}$

$\Rightarrow P^t B P = (A^{-1}P)^{-1} B P = P^{-1} A B P$.

$\Rightarrow AB \sim_s P^t B P$

$P^t B P$ 对称 $\Rightarrow$ 其特征值均为实数 □

§2、期末复习

本学期主要内容

线性代数基本内容（上学期第2章抽象代）

- 双线性形（二次型）理论
  - ① 矩阵表示
  - ② 合同标准形.
  - ③ 极化公式
  - ④ 应用（二次曲面 ...）

  半期前内容，不专门考.

- 线性映射理论
  - ① 矩阵表示，相似
  - ② 重要不变量
    - 特征值，
    - 特征向量
    - 特征多项式
    - 极小多项式

    ⇓
  - ③ 相似标准型
    - 不变子空间
    - 不可分空间
    - 循环子空间
    - 子空间分解
    - 根核分解

    ⇓
  - 两类重要标准型
    - 可对角化矩阵
    - Jordan标准型
  - ④ 应用（相似判别法，…）

    不考

- 欧式空间理论（一类特别的二次型理论）
  - ① 重要基础内容
    - ① Cauchy不等式
    - ② Schmidt正交化
    - ③ 正交补
    - ④ $O(n)$
  - 正规算子

② 与内积相容的算子 | 正交、反对称
标准型及计算方法）

③ 复正式空间（Hermitian空间）

不考

④ 应用（同时对合同角化，判断特征多项式性质……）

介绍基本研究对象 ⟿ 通过各种理论得到一些简单形(标准型)

⟿ 应用.