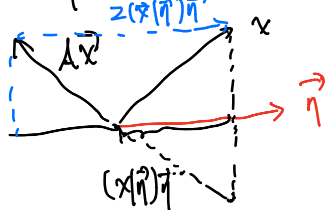
镜面反射：

$\mathcal{A}: V \longrightarrow V$

$\vec{x} \longmapsto \vec{x} - 2(\vec{x}|\vec{\eta})\vec{\eta}$

$\vec{\eta}$ 单位向量



$A\vec{x} = \vec{x} - 2(\vec{x}|\vec{\eta})\vec{\eta}$.

求实二次型 $q(\vec{x}) = n(\sum_{i=1}^{n} x_i^2) - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2$ 的标准形.

解：

$(\sum_{i=1}^{n} x_i)^2$ 对应的实对称矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$\chi_A = (t-n)t^{n-1}$

$\exists T \in O_n(\mathbb{R})$, s.t. $T^t A T = \begin{pmatrix} n & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$

$n(\sum_{i=1}^{n} x_i^2)$ 对应矩阵为 nE.

$q(\vec{x})$ 对应的矩阵为 $nE - A$

$$T^t(nE-A)T = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & n & & \\ & & \ddots & \\ & & & n \end{pmatrix}.$$

$\Rightarrow$ 标准形为 $q(\vec{y}) = ny_2^2 + \cdots + ny_n^2$.

如何求 T?

$\chi_A = (t-n)t^{n-1} \Rightarrow t_1 = n,\ t_2 = 0$

$\to \operatorname{rank}(\ ) = n-1$

$$nE - A = \begin{pmatrix} n-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & n-1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & n-1 \end{pmatrix},$$ 解空间为 $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

单位化为 $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{n}} \\ \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{n}} \end{pmatrix}$

$\to x_1 + \cdots + x_n = 0$

$$-A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & -1 \end{pmatrix}$$

解空间为

$$\left\langle \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{\varepsilon_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{\varepsilon_2}, \cdots, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\varepsilon_{n-1}} \right\rangle$$

正交化 $u_1 = \varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

$\left(\frac{1}{2} \right.$

$$u_2 = \varepsilon_2 - \frac{(\varepsilon_2|u_1)}{(u_1|u_1)}u_1 = \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -1 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}$$

$$u_3 = \varepsilon_3 - \frac{(\varepsilon_3|u_1)}{(u_1|u_1)}u_1 - \frac{(\varepsilon_3|u_2)}{(u_2|u_2)}u_2 = \begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -1 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}_{1\times n}$$

$$\vdots$$

$$u_i = \varepsilon_i - \frac{(\varepsilon_i|u_1)}{(u_1|u_1)} \cdots \frac{(\varepsilon_i|u_{i-1})}{(u_{i-1}|u_{i-1})} = \begin{pmatrix}\frac{1}{i}\\ \vdots \\ \frac{1}{i} \\ -1 \\ \vdots \\ 0\end{pmatrix} \left.\vphantom{\begin{pmatrix}\frac{1}{i}\\ \vdots \\ \frac{1}{i}\end{pmatrix}}\right\} i\text{个}.$$

$$\vdots$$

$$u_{n-1} = \varepsilon_{n-1} - \frac{(\varepsilon_{n-1}|u_1)}{(u_1|u_1)}u_1 - \cdots - \frac{(\varepsilon_{n-1}|u_{n-2})}{(u_{n-2}|u_{n-2})}u_{n-2}$$

$$= \begin{pmatrix}\frac{1}{n-1}\\ \vdots \\ \frac{1}{n-1} \\ -1\end{pmatrix} \qquad \left(\frac{1}{i}\right)^2 \cdot i + 1 = \frac{i+1}{i}$$

单位化

取 $\eta_i = \frac{u_i}{\|u_i\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{i(i+1)}}, \cdots, \frac{1}{\sqrt{i(i+1)}}, \frac{-i}{\sqrt{i(i+1)}}, 0, \cdots, 0\right)^t \quad i=1,2,\cdots,n-1$

令 $T = \left(\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{n}}\\ \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{n}}\end{pmatrix}, \eta_1, \cdots, \eta_{n-1}\right)$，则 $T^t(nE-A)T = \begin{pmatrix}0 & & & \\ & n & & \\ & & \ddots & \\ & & & n\end{pmatrix}$

思考题：设 $A, B \in \mathcal{L}(V)$ 是对称算子，证明：如果 A 正定，则 AB 的特征根都是实数。

pf：A, B 对称算子，则对应的矩阵 A, B 为对称矩阵。

A 正定 $\Rightarrow$ A^{-1} 正定，结合 B 实对称

$\Rightarrow \exists P \in GL_n(\mathbb{R})$, s.t. $P^tAP = E$, $P^{-1}BP = C := \mathrm{diag}(\underbrace{\lambda_1 \cdots \lambda_n}_{})$

正定阵的所有特征值
$\lambda_i \in \mathbb{R}$.

$$C = EC = (P^{-1}AP)^t P^{-1}BP = P^t A^t (P^{-1})^t P^{-1} BP$$
$$= P^t ABP$$

$\Rightarrow C \sim_s AB$

$\Rightarrow$ AB的所有特征值为实数.

期末总结

线性空间 + 二次型（不单独考）

1. 线性算子.

会验证给定的映射是线性算子 $\mathcal{A}$

会求在某组基下，给定的算子的矩阵表示，

不同基底下矩阵关系是相似的，涉及转换矩阵。

例 第九周习题 1. $\boxed{\ker(\mathcal{A})}$, $\boxed{\operatorname{rank}(\mathcal{A})}$, $\boxed{\dim(\ker(\mathcal{A}))}$

prop. $\boxed{\text{核核分解}}$: $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, $p, q \in F[t]$ 互素，如果 $(pq)(\mathcal{A}) = 0$. 则

$$V = \ker(p(\mathcal{A})) \oplus \ker(q(\mathcal{A})).$$

prop $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, $\ker(\mathcal{A}^0) \subset \ker(\mathcal{A}) \subset \ker(\mathcal{A}^2) \subset \cdots$ 和 $\operatorname{im}(\mathcal{A}^0) \supset \operatorname{im}(\mathcal{A}) \supset \operatorname{im}(\mathcal{A}^2) \ldots$

2. 极小多项式. 例. 第十周 5.

设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, $\mu_{\mathcal{A}}$ 是 $\mathcal{A}$ 的零化多项式中首一的次数最小的多项式。

性质: ① $f(\mathcal{A}) = 0 \Leftrightarrow \mu_{\mathcal{A}} \mid f$.

② $\mathcal{A}$ 可逆 $\Leftrightarrow \mu_{\mathcal{A}}(0) \neq 0 \Leftrightarrow t \nmid \mu_{\mathcal{A}}$.

③ $\dim(F[\mathcal{A}]) = \deg_t(\mu_{\mathcal{A}})$.

例: $\deg_t(\mu_{\mathcal{A}}) = 1 \Leftrightarrow \mathcal{A} = \lambda \mathcal{E}$, $\lambda \in F$.

$\mu_A(t)=t^k_{(k\geq 1)} \iff A$ 只有特征值为0

3. 不变子空间 $A\in\mathcal{L}(V)$.

Def. $U\subseteq V$ 子空间，若 $AU\subseteq U$，则称 U 是 $\boxed{A\text{-子空间}}$.

prop. ① U 是 A-子空间，$\vec{e_1},\cdots,\vec{e_d}$ 是 U 的一组基，由此扩充成 V 的一组基 $\vec{e_1},\cdots,\vec{e_d},\underset{\sim\sim\sim}{\vec{e}_{d+1},\cdots,\vec{e_n}}$. 则 A 在此基下的矩阵是

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix}.$$

上述 $\vec{e}_{d+1},\cdots,\vec{e_n}$ 也是 A-子空间，则矩阵为 $\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix}$.

② $A,B\in\mathcal{L}(V)$，$\boxed{AB=BA}$，则 $\ker(B)$ 和 $\operatorname{im}(B)$ 也是 A-子空间.

③ U_1,U_2 是 A-子空间，则 U_1+U_2 和 $U_1\cap U_2$ 是 A-子空间.

Thm. $A\in\mathcal{L}(V)$，$\boxed{V=U_1\oplus\cdots\oplus U_k}$，$U_i$ 非平凡 A-子空间，基底 Z_i（U_i 对应），则 A 在 V 的一组基 $Z_1\cup\cdots\cup Z_k$ 下的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & & & 0 \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_k \end{pmatrix},\quad A_i \text{ 是 } \underset{\in\mathcal{L}(U_i)}{A|_{U_i}} \text{ 在 } Z_i \text{ 下的矩阵.}$$

例：第十周. 3..

$$\mu_A=\operatorname{lcm}(\mu_{A_{U_1}},\cdots,\mu_{A_{U_k}})$$

4. 特征值，特征向量，特征多项式，特征子空间.

Def: $A\in\mathcal{L}(V)$ 若 $\vec{v}\in V\setminus\{\vec{0}\}$，s.t. $A\vec{v}=\underset{\in F}{\lambda}\vec{v}$，则称 $\vec{v}$ 为 A 的特征向量，λ 为对应的特征值. 注：$\langle\vec{v}\rangle$ 是 A-子空间

非零.

$V^\lambda:=\{\vec{v}\in V\mid A\vec{v}=\lambda\vec{v}\}=\ker(A-\lambda\mathcal{E})$ 称为关于 λ 的特征子空间.

V^λ 是 A-子空间. 例：第十一周题 1. 6.

特征多项式定义为 $\chi_A=\det(tE-\underline{A})$ A 在某组基下的矩阵.

$\chi_A=0$ 的所有根对应着 $\mathcal{A}$ 的所有特征值.
(在F中)

相似不变量：秩，行列式，迹，极小多项式，特征多项式，特征根.

注：特征向量不是. 例第十一周-3.
如何求一个矩阵的特征值和特征向量.

5. 对角化判定方法

$\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$ 可对角化 $\dim(V)=n$

$\Leftrightarrow$ $\mathcal{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量 （注：充分条件：$\mathcal{A}$ 有 n 个不同特征值，则 $\mathcal{A}$ 可对角化）.

$\Leftrightarrow$ $V=V^{\lambda_1}\oplus\cdots\oplus V^{\lambda_k}$，$\mathrm{spec}_F(\mathcal{A})=\{\lambda_1,\cdots,\lambda_k\}$

$\Leftrightarrow$ $\dim V=\dim(V^{\lambda_1})+\cdots+\dim(V^{\lambda_k})$

$\Leftrightarrow$ $\chi_A(t)$ 在 $F[t]$ 中分解成一次因子之积且对 $\forall\lambda\in\mathrm{spec}_F(\mathcal{A})$，$\lambda$ 的几何重数 = 代数重数. （几何重数 $\le$ 代数重数）

$\chi_A=(t-\lambda_1)^{n_1}\cdots(t-\lambda_s)^{n_s}$，$n_1$：$\lambda_1$ 对应的代数重数

几何重数：$\dim(V^{\lambda_1})=n-\mathrm{rank}(\lambda_1E-A)$.

$\Leftrightarrow$ $\mu_A(t)$ 在 $F[t]$ 中分解成两两互素的一次因子之积.

给定矩阵A，若A可对角化，如何求可逆矩阵P，使得 $P^{-1}AP=B$，B：对角阵，对角矩阵

$V=V^{\lambda_1}\oplus\cdots\oplus V^{\lambda_k}$.

$\{\vec{e}_{11},\cdots,\vec{e}_{1d_1},\cdots\cdots,\vec{e}_{k1},\cdots,\vec{e}_{kd_k}\}$

则 $\mathcal{A}$ 在上述基底下矩阵是
$$\begin{pmatrix}\lambda_1E_{d_1}&&&\\&\lambda_2E_{d_2}&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_kE_{d_k}\end{pmatrix}$$

例十二周习题1.

6. 循环子空间.

$\vec{v}\in V$ $F[\mathcal{A}]\vec{v}=\langle\vec{v},\mathcal{A}\vec{v},\mathcal{A}^2\vec{v},\cdots\rangle$

$\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, $\vec{v} \in V$,

prop: ① $F[\mathcal{A}]\cdot\vec{v} = \{ p(\mathcal{A})\cdot\vec{v} \mid p(t) \in F[t] \}$

② $F[\mathcal{A}]\cdot\vec{v}$ 是 $\mathcal{A}$ -不变的

③ $\dim(F[\mathcal{A}]\cdot\vec{v}) = \deg_t(\underbrace{\mu_{\mathcal{A},\vec{v}}}_{t}) := d$

$f(\mathcal{A})\cdot(\vec{v}) = 0$

则 $\vec{v}, \mathcal{A}\vec{v}, \cdots, \mathcal{A}^{d-1}\vec{v}$ 是 $F[\mathcal{A}]\cdot\vec{v}$ 的一组基且 $d = \dim(F[\mathcal{A}]\cdot\vec{v})$

给定 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, 和 $\vec{v} \in V$, 如何求 $\dim(F[\mathcal{A}]\cdot\vec{v})$.

$\mathcal{A}^0(\vec{v}), \quad \mathcal{A}^1(\vec{v}), \cdots, \quad \mathcal{A}^i(\vec{v}), \cdots$

Def: $V = F[\mathcal{A}]\cdot\vec{v}$, 称 $\mathcal{A}$ 是 V 上的循环算子, $\vec{v}$ 是 V 中循环向量,
V 是关于 $\mathcal{A}, \vec{v}$ 的循环空间.

Thm. $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$. $\mathcal{A}$ 是循环算子 $\Leftrightarrow \deg_t(\mu_{\mathcal{A}}) = \dim V$

Thm (Hamilton-Cayley 定理加强版)

$\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, 则 ① $\mu_{\mathcal{A}}(t) \mid \chi_{\mathcal{A}}(t)$

② $\chi_{\mathcal{A}}(t)$ 在 $F[t]$ 中的不可约因子都是 $\mu_{\mathcal{A}}(t)$ 的因子.

7. Jordan 标准型

prop. $\forall A \in M_n(\mathbb{C})$, $A \underset{\exists J}{\sim} J_A := \begin{pmatrix} J_{d_1}(\lambda_1) & & & \\ & J_{d_2}(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{d_k}(\lambda_k) \end{pmatrix}$

(不计排序意义下唯一).

$J_{d_i}(\lambda_i) = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix}_{d_i \times d_i}$

求给定矩阵的若当标准型, 需掌握.

prop. (1) $\operatorname{rank}(J_A) = \sum_{i=1}^{k} \operatorname{rank}(J_{d_i}(\lambda_i))$.

$\operatorname{rank}(J_{d_i}(\lambda_i)) \ne d_i - 1$, $\mu_{J_{d_i}(\lambda_i)} = (t-\lambda_i)^{d_i}$

(2) $m_A = m_{J_A} = \mathrm{lcm}\left((t-\lambda_1)^{\alpha_1}, \cdots, (t-\lambda_k)^{\alpha_k} \right)$

(3) λ 几何重数 = 关于λ的若当块在J_A中出现的次数

λ代数重数 = λ在J_A主对角线上出现的次数。

λ在m_A中重数 = J_A中关于λ的Jordan块出现最大阶数

由(3)，给定矩阵A的极小多项式和特征多项式，会求A的若当标准型。

例 14周 2.

(4). 给定矩阵A,

$\chi_A = (t-\lambda_1)^{d_1} \cdots (t-\lambda_k)^{d_k}$

$\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ 两两不同,

$R(\lambda_i, l) = \mathrm{rank}(\lambda_i E - A)^l$,

则 $N(\lambda_i, l) = R(\lambda_i, l-1) + R(\lambda_i, l+1) - 2R(\lambda_i, l)$

欧氏空间 $(F=\mathbb{R})$

Def. (内积). 双线性, 对称, 正定

例 15周. 2.

Gram 矩阵: $G(\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_m) = \left((\vec{v}_i | \vec{v}_j) \right)_{m\times m}$

prop. (1) $\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_m$ 线性相关 $\Leftrightarrow$ $\mathrm{rank}(G(\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_m)) < m$.

(2) $\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_m \in V$, 设 $\vec{x} = \alpha_1\vec{v}_1 + \cdots + \alpha_m \vec{v}_m$,

$\vec{y} = \beta_1\vec{v}_1 + \cdots + \beta_m \vec{v}_m$, 则

$(\vec{x}|\vec{y}) = (\alpha_1, \cdots, \alpha_m)(G(\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_m))\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots \\ \beta_m\end{pmatrix}$

(3) $G(\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_m) = E \Leftrightarrow \vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_m$ 是单位正交向量

Def: $\|\vec{x}\| = \sqrt{(\vec{x}|\vec{x})}$.

距离 $\|\vec{x} - \vec{y}\|$

夹角 $\theta = \arccos\left(\frac{(\vec{x}|\vec{y})}{\|\vec{x}\|\|\vec{y}\|} \right)$

夹角 $\theta = \arccos(\ldots)$

Gram - schmidt 正交化:

$\underbrace{\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_k}_{\Downarrow} \in V$ 线性无关，则∃两两正交的单位向量 $\vec{\varepsilon}_1, \cdots, \vec{\varepsilon}_k$, s.t.

$\langle \vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_i \rangle = \langle \vec{\varepsilon}_1, \cdots, \vec{\varepsilon}_i \rangle$, $i=1, \cdots, k$.

$$\vec{\varepsilon}_1 = \frac{\vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|}$$

$$\vec{\varepsilon}_2' = \vec{v}_2 - (\vec{v}_2|\vec{\varepsilon}_1)\vec{\varepsilon}_1$$

$$\vec{\varepsilon}_2 = \frac{\vec{\varepsilon}_2'}{\|\vec{\varepsilon}_2'\|}$$

$$\vdots$$

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{\varepsilon}_i' &= \vec{v}_i - (\vec{v}_i|\vec{\varepsilon}_1)\vec{\varepsilon}_1 - \cdots - (\vec{v}_i|\vec{\varepsilon}_{i-1})\vec{\varepsilon}_{i-1} \\ \vec{\varepsilon}_i &= \frac{\vec{\varepsilon}_i'}{\|\vec{\varepsilon}_i'\|} \end{aligned}}$$

$$\vdots$$

$$\vec{\varepsilon}_k' = \vec{v}_k - (\vec{v}_k|\vec{\varepsilon}_1)\vec{\varepsilon}_1 - \cdots - (\vec{v}_k|\vec{\varepsilon}_{k-1})\vec{\varepsilon}_{k-1}$$

$$\vec{\varepsilon}_k = \frac{\vec{\varepsilon}_k'}{\|\vec{\varepsilon}_k'\|}.$$

应用：设 $\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n$ 是 V 单位正交基，且 $\vec{x}, \vec{y} \in V$,

$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + \cdots + x_n\vec{e}_n$

$\vec{y} = y_1\vec{e}_1 + \cdots + y_n\vec{e}_n$

① $(\vec{x}|\vec{y}) = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$

② $(\vec{x}|\vec{e}_i) = x_i$, $i=1,2,\cdots,n$.

$\vec{\varepsilon}_1, \cdots, \vec{\varepsilon}_k$ 是 $\langle \vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_k \rangle$ 的一组单位正交基。

正交补

$U^{\perp} = \{\vec{x} \in V \mid \vec{x} \perp U, \text{ i.e. } (\vec{x}, \vec{u}) = 0, \forall \vec{u} \in U\}$.

Thm ① $U^{\perp}$ 是子空间且 $U \perp U^{\perp}$.

② $V = U \oplus U^{\perp}$.

③ $(U^{\perp})^{\perp} = U$

④ $W_1 \subset W_2$, $W_1^{\perp} \supset W_2^{\perp}$

⑤ $(W_1 + W_2)^{\perp} = W_1^{\perp} \cap W_2^{\perp}$

⑥ $(W_1 \cap W_2)^{\perp} = W_1^{\perp} + W_2^{\perp}$.

题型：给定子空间 U，求 $U^{\perp}$ 的一组单位正交基。 例 第16周 1.2.

正交矩阵与正交等价

Def: $\boxed{PP^t=E}$, $P\in GL_n(\mathbb{R})$, 则称 P 是正交矩阵，集合记为 $O_n(\mathbb{R})$

例 $P\in O_2(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \exists\,\theta$, s.t

$$P=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix} \quad \text{或者} \quad P=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}$$

例第17周 L

掌握. A 实对称矩阵. 如何求正交矩阵 P, s.t $P^tAP=B$ 对角矩阵)

正规算子和正规矩阵

A 正规算子 $AA^*=A^*A$. A 满足 $AA^t=A^tA$

Thm $A\in M_n(\mathbb{R})$ 正规，则 $\exists\,\alpha_1,\beta_1,\cdots,\alpha_s,\beta_s,\lambda_{2s+1},\cdots,\lambda_n\in\mathbb{R}$,

$\beta_1,\cdots,\beta_s\neq 0$ s.t

$$A\sim_o B=\begin{pmatrix}N(\alpha_1,\beta_1) & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & N(\alpha_s,\beta_s) & & \\ & & & \lambda_{2s+1} & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

其中 $N(\alpha,\beta)=\begin{pmatrix}\alpha & -\beta\\ \beta & \alpha\end{pmatrix}$

$\beta\neq 0$

(i) 对称算子.

$A \xrightarrow{\text{单位正交基下}}$ 对称矩阵. , $M=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$

所有特征值均为实数.

(ii) 斜对称算子

$A\in\mathcal{L}(V)$ 斜对称，则 $\exists\,\beta_1,\cdots,\beta_s\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

$$A\sim_o\begin{pmatrix}N(0,\beta_1) & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & N(0,\beta_s) & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0\end{pmatrix}$$

特征值： 0 或者 纯虚数 ai, $a\in\mathbb{R}$.

正交算子.

$\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ 正交, 则 $\exists\, \theta_1, \dots, \theta_s \in (0,\pi)$, $\lambda_{2s+1}, \dots, \lambda_n \in \{-1, 1\}$, s.t.

$\mathcal{A}$ 在V的某组单位正交基下的矩阵是

正交矩阵

$$M = \begin{pmatrix} N(\cos\theta_1, \sin\theta_1) & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & N(\cos\theta_s, \sin\theta_s) & & & \\ & & & \lambda_{2s+1} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

特征根：复数模长都是1)。