§1. 若当标准计算:

$A\in M_n(F)$, 若 A 若当标准形存在

令 $\chi_A=(t-\lambda_1)^{d_1}\cdot\ \cdots\ \cdot(t-\lambda_k)^{d_k}$, $\lambda_1,\cdots,\lambda_k$ 两两不同.

记 $R(\lambda_i,l)=\mathrm{rank}\,(\lambda_iE-A)^l$

则 $N(\lambda_i,l)=R(\lambda_i,l-1)+R(\lambda_i,l+1)-2R(\lambda_i,l)$.

HW 1. $A=\begin{pmatrix}2&6&-5\\1&1&-5\\1&2&-6\end{pmatrix}$. $J_A=?$

解: $\chi_A(t)=|tE-A|=(\lambda+1)^3$ A 唯一个特征值 $\lambda=-1$

$\dim V^\lambda=3-\mathrm{rk}(A-\lambda E)=3-\mathrm{rk}(A+E)=2$

$J_A=\begin{pmatrix}-1&1&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$.

$B=A-\lambda E=\begin{pmatrix}3&6&-5\\1&2&-5\\1&2&-5\end{pmatrix}$ $B^2=0$ $\mathrm{rk}(B)=1$ □

注: $N(\lambda,1)=\mathrm{rk}(B^0)+\mathrm{rk}(B^2)-2\mathrm{rk}(B)=3-2=1$

$N(\lambda,2)=\mathrm{rk}(B)+\mathrm{rk}(B^3)-2\mathrm{rk}(B^2)=1-0-2\cdot0=1$

HW 4. (i) $J_{2m}^{2}(0)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & & & \\ & 0 & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & & \ddots & 0 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$. (ii) $J_n^{k}(\lambda)$

解 (i) $A=J_{2m}^{2}(0)$. $\chi_A(t)=|tE-A|=t^{2m}$, $\lambda=0$ 唯一特征值.

$$\dim V^{\lambda}=2m-\mathrm{rk}(\lambda E-A)=2m-\mathrm{rk}(A)$$
$$=2.$$

$$R(\lambda,l)=\mathrm{rk}((A-\lambda E)^{l})=\mathrm{rk}(J_{2m}^{2l}(0))=\begin{cases}2m-2l, & l\le m\\ 0 & l>m\end{cases}$$

$$N(\lambda,l)=R(\lambda,l-1)+R(\lambda,l+1)-2R(\lambda,l)$$

$$N(\lambda,l)=\begin{cases}0 & l<m\\ 2 & l=m\\ 0 & l>m\end{cases}$$

$$\Rightarrow J_A=\begin{pmatrix}J_m(0) & 0\\ 0 & J_m(0)\end{pmatrix}.$$

注: $\mu_A=t^{m}$, $\Rightarrow$ A若当块最大为 m 阶.

Q: $\begin{cases} B=J_{2m+1}^{2}(0), & J_B=?\\ C=J_n^{k}(0), & J_C=?\end{cases}$

(ii) $D = J_n^k(\lambda)$, $J_D = ?$ $\lambda \neq 0$.

$$J_n(\lambda) = \lambda E + J_n(0)$$

$$J_n^k(\lambda) = (\lambda E + J_n(0))^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \lambda^i J_n^{n-i}(0)$$

$$D = \begin{pmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1} & & * \\ & \lambda^k & \ddots & \\ & & \ddots & k\lambda^{k-1} \\ & & & \lambda^k \end{pmatrix}$$

$\chi_D(t) = (t-\lambda^k)^n$, D有唯一特征值 λ^k

$$\dim V^{\lambda^k} = n - \mathrm{rk}(\lambda^k E - D)$$

$$\lambda^k E - D = \begin{pmatrix} 0 & -k\lambda^{k-1} & & * \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & -k\lambda^{k-1} \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \mathrm{rk}(\lambda^k E - D) = n-1$

$\dim V^{\lambda^k} = 1$.

$$\Rightarrow J_D = J_n(\lambda^k) = \begin{pmatrix} \lambda^k & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda^k \end{pmatrix}. \quad \square$$

矩阵相似判别法：① A, B 初等因子相同

② $\mu_A=\mu_B$ ($\chi_A=\chi_B$) p_i 为 μ_A 不可因子，

$rk(p_i(A)^l) = rk(p_i(B^l))$ $i= \cdots$ $l= \cdots$

③ $\forall f\in F[t]$，$rk f(A) = rk f(B)$.

$\Rightarrow A\sim A^t$，$\forall A\in M_n(F)$

HW5：$\mathcal{A}\in L(V)$ 若 $\mathcal{A}$ 有 k 维不变子空间，则 $\mathcal{A}$ 有 $n-k$ 维不变子空间

证：设 U 为 $\mathcal{A}$ 的 k 维不变子空间，取一组基为 $e_1,\cdots,e_k$，扩充为 V 的一组基 $e_1,\cdots,e_n$. $\mathcal{A}$ 在这组基下矩阵为

$\mathcal{A}(e_1,\cdots,e_n)=(e_1,\cdots,e_n)A$ $\quad A=\begin{pmatrix} B & C\\ 0 & D\end{pmatrix}$ $\quad B\in M_k(F)$, $D\in M_{n-k}(F)$

$$A\sim A^t \Rightarrow A^t=P^{-1}AP,\ P\in GL_n(F)$$

$$A^t=\begin{pmatrix} B^t & 0\\ C^t & D^t\end{pmatrix}$$

取另一组基 $(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)=(e_1,\cdots,e_n)\cdot P$

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)&=\mathcal{A}(e_1,\cdots,e_n)\cdot P\\&=(e_1,\cdots,e_n)\cdot A\cdot P\\&=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)\cdot P^{-1}AP\end{aligned}$$

$\Rightarrow \mathcal{A}$ 在基 $(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)$ 下矩阵为 $P^{-1}AP=A^t$

取 $W=\langle\varepsilon_{k+1},\cdots,\varepsilon_n\rangle$

$$\mathcal{A}(\varepsilon_{k+1},\cdots,\varepsilon_n)=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_k)\cdot 0+(\varepsilon_{k+1},\cdots,\varepsilon_n)\cdot D^t = (\varepsilon_{k+1},\cdots,\varepsilon_n)\cdot D^t$$

$\Rightarrow W$ 为 $\mathcal{A}$ 的 $n-k$ 维不变子空间. □

§2 内积空间

定义：V $\mathbb{R}$-向量空间，称 $(\ |\ )$ 为 V 上内积 若

(i) $(x|x)\geq 0$ 且 $(x|x)=0 \Leftrightarrow x=0$. 正定

(ii) $(x|y)=(y|x)$ 对称

(iii) $(ax+by|z)=a(x|z)+b(y|z)$ 线性.

$x,y,z\in V,\ a,b\in\mathbb{R}$.

模长：$\|x\|=\sqrt{(x|x)}$

2. $V=\mathbb{R}[x]_{n+1}=\{f\in\mathbb{R}[x]\ |\ \deg f\leq n\}$

$(f|g):=\sum_{k=0}^{n} f(\frac{k}{n})\cdot g(\frac{k}{n})$ $\quad (\ |\ ): V\times V\longrightarrow\mathbb{R}$.

(i) $(\ |\ )$ 定义 V 上内积

(ii) 求 $\|x\|$.

(i) 对称和线性显然，只验证正定性.

$f\in V$,

$(f|f)=\sum_{k=0}^{n} f(\frac{k}{n})^2 \geq 0$

若 $f=0$. $\Rightarrow (f,f)=\sum_{k=0}^{n} f(\frac{k}{n})^2=0$. ✓.

若 $(f|f)=0$，即 $\sum_{k=0}^{n} f(\frac{k}{n})^2=0 \Rightarrow f(\frac{k}{n})=0$

$k=0,---,n+1$.

$\Rightarrow f$ 有 $n+1$ 个根. $\deg(f)\leq n$

$\Rightarrow f=0$

(ii) $x\in V$ $\quad \|x\|=\sqrt{(x|x)}=\sqrt{\sum_{k=0}^{n}(\frac{k}{n})(\frac{k}{n})}=\sqrt{\sum_{k=0}^{n}\frac{k^2}{n^2}}$

$$1+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad =\sqrt{\frac{(n+1)(2n+1)}{6n}}.$$ $\square$

3. (i) $\|u+v\|^2+\|u-v\|^2=2\|u\|^2+2\|v\|^2$

(ii) $\|u\|=\|v\|$, $(u-v)\perp(u+v)$.

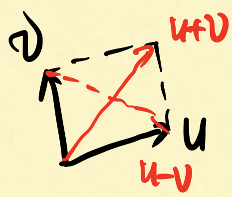
证： 对 $u\in V$ $\|u\|^2=(u|u)$

(i) $(u+v|u+v)+(u-v|u-v)$

$=(u|u)+(u|v)+(v|u)+(v|v)+(u|u)-(u|v)-(v|u)+(v|v)$

$=2(u|u)+2(v|v)$

$=2\|u\|^2+2\|v\|^2$

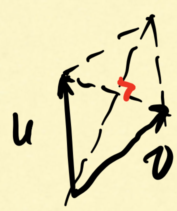


(ii) $\|u\|=\|v\|$, $(u+v)\perp(u-v)$.

$(u+v|u-v)=(u|u)+(u|v)-(v|u)-(v|v)$

$=(u|u)-(v|v)$

$=\|u\|^2-\|v\|^2=0$



$\square$

(V为实向空间)

命题：若 $\mathscr{A}\in L(V)$ 则 $\mathscr{A}$ 有 1 维 或 2 维向量空间.

证明：取 V 一组基 $e_1,\cdots,e_n$，$\mathscr{A}(e_1,\cdots,e_n)=(e_1,\cdots,e_n)\cdot A$

$A\in M_n(\mathbb{R})$.

$\chi_A(t)$ 为一个 n 次实多项式.

①若 $\chi_A(t)$ 有实根 λ，$\Rightarrow V^\lambda\neq 0$ 任取 $0\neq v\in V^\lambda$,

$\mathscr{A}v=\lambda v \Rightarrow \langle v\rangle$ 为 $\mathscr{A}$ 的 1 维不变子空间.

②若 $\chi_A(t)$ 没有实根，$\exists\ \mu\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$. s.t. $\chi_A(\mu)=0$

$\Rightarrow$ 矩阵 A 有复特征值 μ，与复的特征向量 $Y=\begin{pmatrix}a_1+ib_1\\a_2+ib_2\\\vdots\\a_n+ib_n\end{pmatrix}$

i.e. $A\cdot Y=\mu\cdot Y \quad Y\in\mathbb{C}^n \quad \mu=c+id$.

取 $v_1=\begin{pmatrix}a_1\\\vdots\\a_n\end{pmatrix} \quad v_2=\begin{pmatrix}b_1\\\vdots\\b_n\end{pmatrix} \quad Y=v_1+iv_2$

注：$v_1\neq 0$，$v_2\neq 0$，v_1,v_2 线性无关.

$A\cdot Y=\mu\cdot Y\Rightarrow A(v_1+iv_2)=(c+id)(v_1+iv_2)$

$\Rightarrow Av_1+iAv_2=cv_1-dv_2+i(dv_1+cv_2)$

$\Rightarrow\begin{cases}Av_1=cv_1-dv_2\\A\cdot v_2=dv_1+cv_2\end{cases} \quad v_1,v_2\in\mathbb{R}^n$

取 $u_1=(e_1,\cdots,e_n)\cdot v_1$，$u_2=(e_1,\cdots,e_n)\cdot v_2$

$\mathscr{A}(u_1,u_2)=(u_1,u_2)\cdot\begin{pmatrix}c&d\\-d&c\end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ 取 $U=\langle u_1,u_2\rangle$，则 U 为 $\mathscr{A}$ 的 2 维不变子空间. □

§3 Gram矩阵，行列式，(有向)体积.

设V为n为实向量空间，$(\ |\ )$为V上内积.

为方便 若$u,v\in V$，我们记 $\langle u,v\rangle := (u|v)$.

我们始终固定一组标准正交基 $e_1,\cdots,e_n$

取$v_1,\cdots,v_n$为V中n个向量.

李老师讲义：$P_n=\sqrt{\det(G(v_1,\cdots,v_n))}$ 为$v_1,\cdots,v_n$生成的平行2n面体体积.

回忆：若$M\in M_n(\mathbb{R})$，$\det M$表示平行2n面体"有向"体积.

设$v_i = v_{i1}e_1+\cdots+v_{in}e_n$，$v_{ij}\in\mathbb{R}$.

则 $v_{ij}=\langle v_i,e_j\rangle$

$$G(v_1,\cdots,v_n)=\big(\langle v_i,v_j\rangle\big)_{ij}$$

$$\langle v_i,v_j\rangle=\langle \sum_k v_{ik}e_k,\sum_l v_{jl}e_l\rangle=\sum_{k,l}v_{ik}\cdot v_{jl}\cdot\delta_{kl}$$
$$=\sum_k v_{ik}\cdot v_{jk}$$

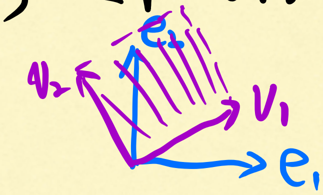
令 $T=\big(\langle v_i,e_j\rangle\big)_{ij}=(v_{ij})$

$$T=\begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1n}\\ v_{21} & v_{22} & \cdots & v_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \\ v_{n1} & v_{n2} & \cdots & v_{nn}\end{pmatrix}$$

则 $G(v_1,\cdots,v_n)=T\cdot T^t$

T的行表示 $v_1,\dots,v_n$ 在基 $e_1,\dots,e_n$ 下的坐标

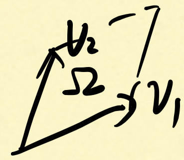
$$P_n=\sqrt{\det(G(v_1,\dots,v_n))}=\sqrt{\det(T\cdot T^t)}=\sqrt{(\det T)^2}$$
$$=|\det T|.$$



由此，借助李老师讲义，可以说明 $M\in M_n(\mathbb{R})$ 的行列式几何意义.

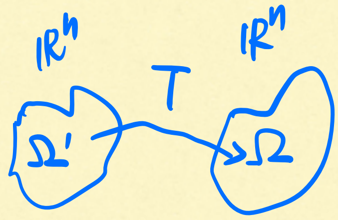
我们可从另一角度看，将 V 通过基 $e_1,\dots,e_n$ 等同于 $\mathbb{R}^n$

坐标为 $x_1,\dots,x_n$



设 Ω 为平行 $2n$ 面体围成的区域.

则 $V=\int_\Omega 1\cdot dx_1\cdots\cdots dx_n$.



回忆：（重积分坐标代换公式）

若 Ω'，$\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 为有界开集.

$T:\Omega'\longrightarrow\Omega$ 为可微双射 逆映射可微.

$$\begin{pmatrix}t_1\\ \vdots\\ t_n\end{pmatrix}\longmapsto\begin{pmatrix}x_1(t_1,\dots,t_n)\\ \vdots\\ x_n(t_1,\dots,t_n)\end{pmatrix}$$

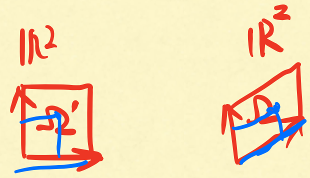
$f:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}$ 为函数，则

$$\int_\Omega f\,dx_1\cdots dx_n=\int_{\Omega'}(f\circ T)\left|\frac{\partial(x_1,\dots,x_n)}{\partial(t_1,\dots,t_n)}\right|dt_1\cdots dt_n$$

对于$\mathbb{R}^n$ 取

$$T(t_1,\cdots,t_n) = t_1 v_1 + t_2 v_2 + \cdots + t_n v_n \qquad v_i = \begin{pmatrix} v_{i1} \\ \vdots \\ v_{in} \end{pmatrix}$$

取 $\Omega' = [0,1]^n \subset \mathbb{R}^n$,



则 $T(\Omega')$ 为 $v_1,\cdots,v_n$ 生成的平行 $2n$ 面体围成的区域 Ω.

$$V(\Omega) = \int_{\Omega} 1 \cdot dx_1 \cdots dx_n = \int_{\Omega'} \left| \frac{\partial(x_1,\cdots,x_n)}{\partial(t_1,\cdots,t_n)} \right| dt_1 \cdots dt_n$$

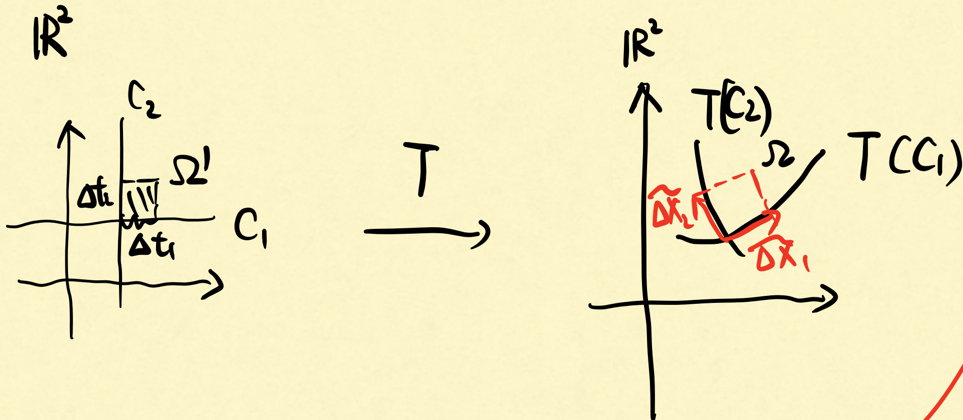
$$\frac{\partial(x_1,\cdots,x_n)}{\partial(t_1,\cdots,t_n)} = \det \begin{pmatrix} v_{11} & v_{21} & \cdots & v_{n1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_{1n} & v_{2n} & \cdots & v_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow V(\Omega) = |\det(v_1,\cdots,v_n)| \cdot V(\Omega')$$
$$= |\det(v_1,\cdots,v_n)|$$

坐标变换公式中:

$$\int_{\Omega} f \, dx_1 \cdots dx_n = \int_{\Omega'} (f \circ T) \cdot \left| \frac{\partial(x_1,\cdots,x_n)}{\partial(t_1,\cdots,t_n)} \right| \cdot dt_1 \cdots dt_n$$

用于 $\left|\frac{\partial(x_1,\cdots,x_n)}{\partial(t_1,\cdots,t_n)}\right|$ 的几何意义?



"$V(\Omega)\approx V(\Omega')\cdot\left|\frac{\partial(x_1,\cdots,x_n)}{\partial(t_1,\cdots,t_n)}\right|$"

局部上的体积变化率

$\mathscr{A}\in L(V)$, $\mathscr{A}(e_1,\cdots,e_n)=(e_1,\cdots,e_n)\cdot A$.

$$A=(A_1,A_2,\cdots,A_n)$$

取 $T:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$$\begin{pmatrix}t_1\\ \vdots\\ t_n\end{pmatrix}\longmapsto A\cdot\begin{pmatrix}t_1\\ \vdots\\ t_n\end{pmatrix}=t_1A_1+\cdots+t_nA_n.$$

则对 $\Omega'\subset\mathbb{R}^n$ 为开集 $T(\Omega')=\Omega\subset\mathbb{R}^n$

则

$$V(\Omega)=\int_{\Omega} 1\,dx_1\cdots dx_n=\int_{\Omega'}\left|\frac{\partial(x_1,\cdots,x_n)}{\partial(t_1,\cdots,t_n)}\right| dt_1\cdots dt_n$$

$$=\left|\frac{\partial(x_1,\cdots,x_n)}{\partial(t_1,\cdots,t_n)}\right|\cdot V(\Omega')$$

$$\left|\frac{\partial(x_1,\cdots,x_n)}{\partial(t_1,\cdots,t_n)}\right|=|\det A|$$

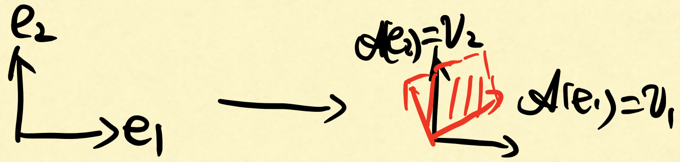
不严谨地说：

若坐标线性变化，则体积线性变化，变化率为 $|\det(A)|=|\det(\mathcal{A})|$. 这即 $|\det(\mathcal{A})|$ 的几何意义.

注：取 $v_1=\mathcal{A}(e_1),\cdots,v_n=\mathcal{A}(e_n)$

则 $\sqrt{\det(G(\mathcal{A}(e_1),\cdots,\mathcal{A}(e_n)))}=\sqrt{\det(A^t\cdot A)}$

$$=|\det A|=|\det(\mathcal{A})|$$

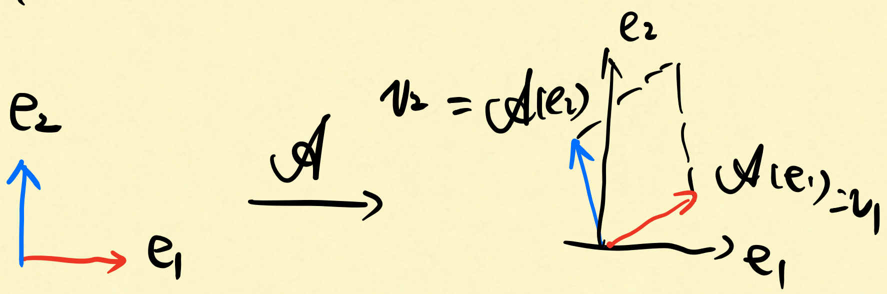


$\det\mathcal{A}$ 有正有负，$\det\mathcal{A}>0$ “$\mathcal{A}$ 保定向”

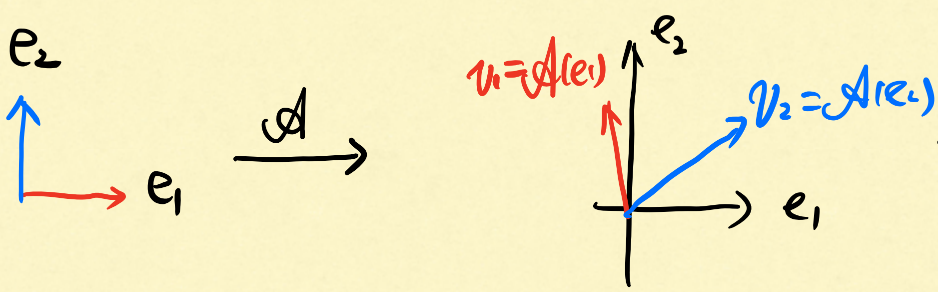
$\det\mathcal{A}<0$，“$\mathcal{A}$ 反定向”

$\det \mathscr{A}$ 表示"有向体积变化率"

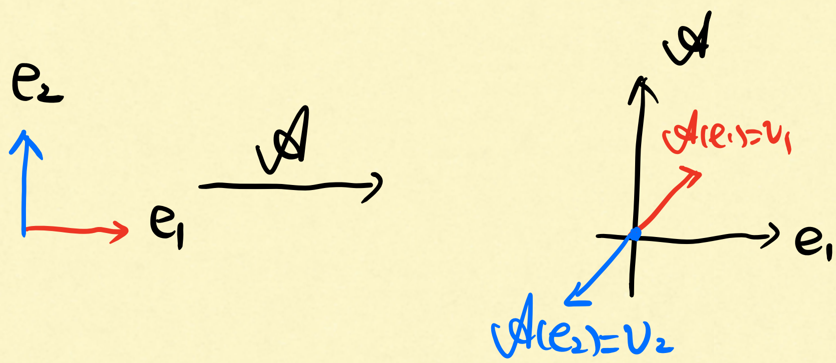
eg: $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$



保定向



反定向.



退化.