Recall：$\mathbb{C}^n$上线性映射的Jordan标准形.

1. $\mathbb{C}^n$上任意线性映射A存在Jordan标准形.

2. Jordan标准形唯一.

3. 若 $J_A = \begin{pmatrix} J_{d_1}(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{d_k}(\lambda_k) \end{pmatrix}$ 为A的Jordan标准形.

① $\mu_A = \mathrm{lcm}\left((t-\lambda_1)^{d_1}, \cdots, (t-\lambda_k)^{d_k}\right)$

$p_A = (t-\lambda_1)^{d_1} \cdot \cdots \cdot (t-\lambda_k)^{d_k}$

② 若 $p_A = (t-\lambda_1)^{d_1} \cdot \cdots \cdot (t-\lambda_k)^{d_k}$，$\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ 两两不同.

$\mu_A = (t-\lambda_1)^{e_1} \cdot \cdots \cdot (t-\lambda_1)^{e_k}$

则 $d_i \geq e_i > 0$.　d_i表示若当形中对角线上λ_i出现的次数.

e_i表示对角线上为λ_i的最大Jordan块阶数.

令$f_i = \dim V^{\lambda_i}$，则f_i为对角线为λ_i的若当块个数.

③ 若 $p_A = (t-\lambda_1)^{d_1} \cdot \cdots \cdot (t-\lambda_k)^{d_k}$，$\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ 两两不同.

记 $R(\lambda_i, l) = \mathrm{rank}\,(\lambda_i E - A)^l$

则 $N(\lambda_i, l) = R(\lambda_i, l-1) + R(\lambda_i, l+1) - 2R(\lambda_i, l)$

注：对任意域F，$A \in M_n(F)$. 若$\exists P \in GL_n(F)$，s.t.

$P^{-1}AP = J_A = \begin{pmatrix} J_{d_1}(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{d_k}(\lambda_k) \end{pmatrix}$，则称$J_A$为A的

Jordan标准形，若Jordan标准形存在，则其是唯一的.

1. $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad C=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$.

解：① $\chi_A=(t-1)^2$ $\quad \dim V^{\lambda=1}=1$

$J_A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

② $\chi_B=(t-1)(t-2)$ $\quad J_B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

③ $\chi_C=(t-2)^2+4$ $\quad \lambda_1=2+2\sqrt{-1}$ $\quad \lambda_2=2-2\sqrt{-1}$.

$J_C=\begin{pmatrix} 2+2\sqrt{-1} & 0 \\ 0 & 2-2\sqrt{-1} \end{pmatrix}$. $\square$

2. $\chi_A=(t-1)^4(t+1)^3t^2$

$M_A=(t-1)^3(t+1)^3t^2$. 求 J_A.

解：$\lambda_1=1$ $\quad \lambda_2=-1$ $\quad \lambda_3=0$

$$J_A=\left(\begin{array}{cccc|ccc|cc} 1 & 1 & & & & & & & \\ & 1 & 1 & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & 1 & & & & & \\ \hline & & & & -1 & 1 & & & \\ & & & & & -1 & 1 & & \\ & & & & & & -1 & & \\ \hline & & & & & & & 0 & 1 \\ & & & & & & & & 0 \end{array}\right)$$

or $J_A = \begin{pmatrix} J_1(1) & & & \\ & J_3(1) & & \\ & & J_3(-1) & \\ & & & J_2(0) \end{pmatrix}$ □

3、

$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ a & 2 & 0 \\ b & c & -1 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{C})$. 求 J_A.

解: $\chi_A = (t-2)^2(t+1)$ $\lambda_1 = 2$ $\lambda_2 = -1$

$\dim V^{\lambda_1} = ?$ $J_A = \begin{pmatrix} 2 & * & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$V^{\lambda_1} = \{x \in \mathbb{C}^3 \mid Ax = \lambda_1 x\}$.

$\lambda_1 E - A = \begin{pmatrix} 0 & & \\ -a & 0 & \\ -b & -c & 3 \end{pmatrix}$

$\dim V^{\lambda_1} = 3 - \operatorname{rank}(\lambda_1 E - A) = \begin{cases} 1 & a \neq 0 \\ 2 & a = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow J_A = \begin{cases} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} & a \neq 0 \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} & a = 0. \end{cases}$ □

4. (i) $f_A(t) = (t-3)^4(t+2)$ $\quad$ $\operatorname{rank}(\mathcal{A}-3\varepsilon)=2$，求 J_A.

解: $$J_A = \begin{pmatrix} 3 & * & & & \\ & 3 & * & & \\ & & 3 & * & \\ & & & 3 & \\ & & & & -2 \end{pmatrix}$$

$\operatorname{rank}(\mathcal{A}-3\varepsilon)=2.$ $\qquad$ $\lambda_1=3$

$\Downarrow$

$$\dim V^{\lambda_1} = 5-\operatorname{rank}(\mathcal{A}-3\varepsilon)=3.$$

$\Rightarrow$ 以3为对角线元素的若当块有3个.

$$\Rightarrow \quad J_A = \left(\begin{array}{c|c|cc|c} 3 & & & & \\ \hline & 3 & & & \\ \hline & & 3 & 1 & \\ & & & 3 & \\ \hline & & & & -1 \end{array}\right)$$

(ii) $\operatorname{rank}(\mathcal{A}-3\varepsilon)=1,3,4$ 时，J_A 是否确定?

$\operatorname{rank}(A-3\varepsilon)=i$ $\qquad$ $\dim V^{\lambda_1=3} = n-\operatorname{rank}(A-3\varepsilon) = 5-i$

$$\dim V^{\lambda_1=3} = \begin{cases} 4 & i=1 \\ 2 & i=3 \\ 1 & i=4 \end{cases}$$

$i=1$ $\quad J_A = \begin{pmatrix} 3 & & & & \\ & 3 & & 0 & \\ & & 3 & & \\ & 0 & & 3 & \\ & & & & -2 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $i=4$ $\quad J_A = \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & & & \\ & 3 & 1 & & \\ & & 3 & 1 & \\ & & & 3 & \\ \hline & & & & -2 \end{array}\right)$

$i=3$ $\quad J_A = \begin{pmatrix} 3 & & & & \\ & 3 & 1 & & \\ & & 3 & 1 & \\ & & & 3 & \\ & & & & -2 \end{pmatrix}$ 或 $J_A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & & & \\ & 3 & & & \\ & & 3 & 1 & \\ & & & 3 & \\ & & & & -2 \end{pmatrix}$

不唯一确定.

□

5、 $A \in M_n(\mathbb{C})$. 若 $tr(A^k)=0$, $k=1,2,\cdots,n$, 则 A 幂零.

证: $\exists P$ s.t. $P^{-1}AP = J_A$.

$\Rightarrow tr(A^k) = tr(J_A^k)$ ($\Leftarrow tr(AB)=tr(BA)$)

若 $\varphi_A = t^{n_0}\cdot(t-\lambda_1)^{n_1}\cdots(t-\lambda_s)^{n_s}$

$\lambda_1,\cdots,\lambda_s$ 互不相同, 且非零, $n_i>0$.

$$J_A = \begin{pmatrix} 0 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & * & & \\ & & 0 & & & & & \\ & & & \lambda_1 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & \lambda_1 & & \\ & 0 & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & \lambda_s \\ & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & \lambda_s \end{pmatrix}$$

$tr(A^k) = n_1\lambda_1^k + \cdots + n_s\lambda_s^k = 0$ $\quad k=1,\cdots,n$ 成立.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_s \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^s & \lambda_2^s & \cdots & \lambda_s^s \end{pmatrix}}_{C} \begin{pmatrix} n_1 \\ \vdots \\ n_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$s \le n$

$$\det C = \lambda_1 \cdots \lambda_s \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_s \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{s-1} & \lambda_2^{s-1} & \cdots & \lambda_s^{s-1} \end{pmatrix} \neq 0$$

$\Rightarrow n_1 = \cdots = n_s = 0$. 与假设矛盾.

$\Rightarrow \chi_A = t^n$

$\Rightarrow \underset{\substack{\| \\ A^n}}{\chi_A(A)} = 0 \quad \Rightarrow$ A幂零矩阵. □

注: • $\chi_A = t^n$, $\Rightarrow J_A = \begin{pmatrix} 0 & * & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & * \\ & & & 0 \end{pmatrix}$, $\Rightarrow J_A$幂零,

$\Rightarrow$ A幂零.

• 记 $\chi_A = (t-\lambda_1)\cdots(t-\lambda_n)$, $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 可以相同.

$tr(A^k) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$. □

初等对称多项式的牛顿公式.

6. $\mathcal{A}\in L(V)$，V $\mathcal{A}$循环，$\lambda\in \mathrm{Spec}_F(\mathcal{A})$，证明 $\dim(V^\lambda)=1$.

证：V^λ 为 $\mathcal{A}$不变子空间. $V^\lambda\subset V$.

引理：$\mathcal{A}\in L(V)$，V-$\mathcal{A}$循环，$U\subset V$，U $\mathcal{A}$-不变，则 U也是 $\mathcal{A}|_U$循环.

引理证明：$V=F[\mathcal{A}]\cdot v$ $\quad I\subset F[t]$.

$I=\{f\in F[t]\mid f(\mathcal{A})\cdot v\in U\}$.

$I\neq\phi$. $U\neq V$，$I\neq F[t]$. (注：I是F[t]上的理想)

I中存在一个次数最小的首一多项式 g.

令 $w=g(\mathcal{A})\cdot v$. 由I的定义，$\Rightarrow w\in U$.

特别地，$\forall f\in F[t]$，$f(\mathcal{A})\cdot w\in U$.

$\Rightarrow F[\mathcal{A}]\cdot w\subset U$.

我们说明 $U\subset F[\mathcal{A}]\cdot w$ 上，从而 U 为 $\mathcal{A}|_U$ 循环子空间

$\forall$ $u\in U$，$\exists$ $h\in F[t]$ s.t. $h(\mathcal{A})\cdot v=u\in U$.

$\Rightarrow h\in I$.

$\Rightarrow \exists$ $q, r\in F[t]$, s.t. $h=g\cdot q+r$

$\deg r<\deg g$.

$\Rightarrow h(\mathcal{A})=q(\mathcal{A})\cdot g(\mathcal{A})+r(\mathcal{A})$

$$\Rightarrow \underbrace{h(\mathcal{A})\cdot v}_{u}=\underbrace{q(\mathcal{A})\cdot g(\mathcal{A})\cdot v}_{q(\mathcal{A})\cdot w}+r(\mathcal{A})\cdot v$$

$\Rightarrow r(\mathcal{A})\cdot v=u-q(\mathcal{A})\cdot w\in U$

$\Rightarrow\ r\in I \underset{\substack{\text{由}I\text{中次数}\\\text{最小性}}}{\Rightarrow} r=0$

$\Rightarrow\ u=h(\mathscr{A})\cdot v=q(\mathscr{A})\cdot w\in F[\mathscr{A}]\cdot w$

即 $U=F[\mathscr{A}]\cdot w$. □

回到第6题：$V^\lambda\subset V$ 是 $\mathscr{A}|_{V^\lambda}$ 的循环子空间.

但 $\mathscr{A}|_{V^\lambda}=\lambda\varepsilon$.

由之前习题 $\Rightarrow \dim V^\lambda=1$.

对角映射成为循环映射的条件. □

例：设 $X\in M_n(\mathbb{C})$，则 $X^2=J_n(0)$ 无解.

$$J_n(0)=\begin{pmatrix}0&1&&\\&\ddots&\ddots&\\&&\ddots&1\\&&&0\end{pmatrix}_{n\times n}.$$

证： $X^2=J_n(0) \Rightarrow X^{2n}=J_n(0)^n=0$

$\Rightarrow X$ 是幂零的

$\Rightarrow \exists P$ s.t $P^{-1}XP=J_X$.

X 幂零 $\Rightarrow J_X=\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} J_{n_1}(0) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{n_s}(0) \end{pmatrix}$

$\operatorname{rank} X=\operatorname{rank} J_X=n-s$

$J_X^2=\begin{pmatrix} J_{n_1}^2(0) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{n_s}(0)^2 \end{pmatrix}$

若 $J_X\neq 0$, $\operatorname{rank} J_X^2<n-s$

$\operatorname{rank}(J_n(0))=n-1$.

$\operatorname{rank}(X^2)=\operatorname{rank}(J_X^2)<n-s\leq n-1=\operatorname{rank}(J_n(0))$

得到矛盾 $\Rightarrow$ 满足 $X^2=J_n(0)$ 的矩阵不存在. □

广义特征子空间（根子空间）

定义：设 $\mathscr{A}\in L(V)$，V 为有限维 F-向量空间，

$\mu_{\mathscr{A}} = p_1^{m_1}\cdot\ldots\cdot p_s^{m_s}\in F[t]$，$p_1,\ldots,p_s$ 为两两互素的首一不可约多项式，$m_1,\ldots,m_s\in\mathbb{Z}^+$. 对 $i=1,2,\ldots,s$

令 $V(p_i)=\ker\left(p_i^{m_i}(\mathscr{A})\right)$，

称 $V(p_i)$ 为 $\mathscr{A}$ 关于 p_i 的广义特征子空间.

引理：设 $\mathscr{A}\in L(V)$，$p,q\in F[t]$ 互素，则 $q(\mathscr{A})\big|_{\ker(p(\mathscr{A}))}$ 可逆.

（与李老师讲义定理11.10，断言2 比较）

证明：$p,q\in F[t]$ 互素，$\exists\ a(t),b(t)\in F[t]$，s.t.

$$a\cdot p+b\cdot q=1.$$

代入 $\mathscr{A}$ 有

$$a(\mathscr{A})\cdot p(\mathscr{A})+b(\mathscr{A})\cdot q(\mathscr{A})=\varepsilon$$

$$\Rightarrow \cancel{a(\mathscr{A})\cdot p(\mathscr{A})\Big|_{\ker(p(\mathscr{A}))}}+b(\mathscr{A})\cdot q(\mathscr{A})\Big|_{\ker(p(\mathscr{A}))}=\varepsilon\Big|_{\ker(p(\mathscr{A}))}$$

$$\Rightarrow b(\mathscr{A})\Big|_{\ker(p(\mathscr{A}))}=\left(q(\mathscr{A})\Big|_{\ker(p(\mathscr{A}))}\right)^{-1}. \quad \square$$

Recall:（扩展的核核分解定理）.

设 $\mathscr{A}\in L(V)$，$\mu_{\mathscr{A}}=p_1^{m_1}\cdots p_s^{m_s}\in F[t]$ 为 $\mu_{\mathscr{A}}$ 在 $F[t]$ 中的不可约分解，令 $K_i=\ker(p_i^{m_i}(\mathscr{A}))$，$\mathscr{A}_i=\mathscr{A}|K_i$，则

$$V=K_1\oplus\cdots\oplus K_s$$

$$\mu_{\mathscr{A}_i}=p_i^{m_i}.$$

推论：（广义特征子空间分解—极小多项式版）

设 $\mathscr{A}\in L(V)$，$\mu_{\mathscr{A}}=p_1^{m_1}\cdots p_s^{m_s}\in F[t]$ 为 $\mu_{\mathscr{A}}$ 在 $F[t]$ 中的不可约分解．则：

① $V=V(p_1)\oplus V(p_2)\oplus\cdots\oplus V(p_s)$.

② 设 $\mathscr{A}_i=\mathscr{A}|V(p_i)$，则 $\mu_{\mathscr{A}_i}=p_i^{m_i}$，$i=1,\cdots,s$.

③ 对 $\forall i\in\{1,\cdots,s\}$，$p_i(\mathscr{A})$ 为

$$V(p_1)+\cdots+V(p_{i-1})+V(p_{i+1})+\cdots+V(p_s)$$

上的可逆算子.

证明：①，② 即扩展的核核分解定理.

对于③ 不妨设 $i=1$，

p_1 和 $p_j^{m_j}$ 互素，$j=2,\cdots,m$，由引理，

$p_1(\mathscr{A})$ 在 $V(p_j)$ 上可逆.

设 $x=x_2+\cdots+x_s\in V(p_2)+\cdots+V(p_s)$

$$0=p_1(\mathscr{A})(x)=\underset{\substack{\cap\\ V(p_2)}}{p_1(\mathscr{A})(x_2)}+\cdots+\underset{\substack{\cap\\ V(p_s)}}{p_1(\mathscr{A})(x_s)}$$

若 $p_1(\mathscr{A})(x)=0 \Rightarrow p_1(\mathscr{A})(x_j)=0.\ j=2,\cdots,s.$

$\Rightarrow x_j=0 \quad j=2,\cdots,s$

$\Rightarrow x=0.$

从而 $p_1(\mathscr{A})$ 在 $V(p_2)+\cdots+V(p_s)$ 为单射. □

例：若 $\mu_A=(t-\lambda_1)\cdot\cdots\cdot(t-\lambda_s)$，则 定理 即 特征子空间分解.

推论：若 $\mu_{\mathscr{A}}=(t-\lambda_1)^{m_1}\cdot\cdots\cdot(t-\lambda_s)^{m_s}$，则 $V=V\left((t-\lambda_1)^{m_1}\right)\oplus\cdots\oplus V\left((t-\lambda_s)^{m_s}\right)$.

特别地，令 $\mathscr{A}_i=\mathscr{A}|_{V((t-\lambda_i)^{m_i})}$，则 $\mathscr{A}_i-\lambda_i\mathscr{E}$ 为 $V\left((t-\lambda_i)^{m_i}\right)$ 上的幂零映射.

证：$\mu_{\mathscr{A}_i}=(t-\lambda_i)^{m_i} \qquad 0=\mu_{\mathscr{A}_i}(\mathscr{A}_i)=(\mathscr{A}_i-\lambda_i\mathscr{E})^{m_i}$ □

注：• 若 $A\in M_n(F)$ 若当标准型存在，则 $\mu_A=(t-\lambda_1)^{m_1}\cdots\cdots(t-\lambda_s)^{m_s}$.

• 若 $\mu_A=(t-\lambda_1)^{m_1}\cdots\cdots(t-\lambda_s)^{m_s}$，则 $\exists\, P\in GL_n(F)$ s.t.

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} M_1 & & \\ & \ddots & \\ & & M_s \end{pmatrix} \quad \text{s.t.} \quad M_i-\lambda_i E \text{ 为幂零矩阵.}$$

• (思考题) 可以证明幂零矩阵一定存在 Jordan 标准形.
(提示：$\mathcal{A}$ 幂零，利用商空间 $V/\ker(\mathcal{A})$ 做维数归纳).

• $A\in M_n(F)$ 若当标准型存在 $\Longleftrightarrow$ $\mu_A=(t-\lambda_1)^{m_1}\cdots\cdots(t-\lambda_s)^{m_s}$.