1.解: $A=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$, $\chi_A=(t-1)^2$ $\Rightarrow$ A的特征值只有1.

经计算, $\dim V^1=1$, $J_2(1)$ 在J_A中出现1次.

$$\Rightarrow J_A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$$

$B=\begin{pmatrix}1&1\\0&2\end{pmatrix}$, $\chi_B=(t-1)(t-2)$ $\Rightarrow$ B两个不同特征值

$$\Rightarrow J_B=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$$

$C=\begin{pmatrix}2&-1\\4&2\end{pmatrix}$, $\chi_C=\begin{vmatrix}t-2&1\\-4&t-2\end{vmatrix}=(t-2)^2+4=0$

$$\Rightarrow \underline{t_1=2+2i},\ t_2=\underline{2-2i}$$

$$\Rightarrow J_C=\begin{pmatrix}2+2i&0\\0&2-2i\end{pmatrix}$$

$\forall A\in M_n(\mathbb{C})$, 若

$$J_A=\begin{pmatrix}J_{d_1}(\lambda_1)&&\\&\ddots&\\&&J_{d_k}(\lambda_k)\end{pmatrix},\quad d_1+d_2+\cdots+d_k=n,$$

$\operatorname{rank}(J_{d_i}(\lambda_i))=d_i-1$

$\operatorname{rank}(J_A)=n-k$.

$\chi_A=(t-\lambda_1)^{\boxed{d_1}}\cdots(t-\lambda_k)^{d_k}$. $\rightarrow$ λ在对角线上出现的次数

$\mu_A=\operatorname{lcm}\left((t-\lambda_1)^{d_1},\cdots,(t-\lambda_k)^{d_k}\right)=(t-\lambda_1)^{\boxed{e_1}}\cdots(t-\lambda_k)^{e_k}$.

$\rightarrow$ 代表 λ_i 出现在J_A中最大Jordan块阶数.

注意到 $e_i\le d_i$

$\dim V^{\lambda_i}$: 代表出现 λ_i 的 Jordan 块的个数.

2.解: $\underline{\chi_A=(t-1)^4(t+1)^3t^2}$, $\Rightarrow$ 1, −1, 0 的代数重数分别是 $\underset{\sim}{4}, \underset{\sim}{3}, \underset{\sim}{2}$.

$\mu_A=(t-1)^3(t+1)^3t^2$. $\Rightarrow$ 1, −1, 0 的 Jordan 块出现的最大阶数分别

3, 3, 2.

$$\Rightarrow J_A = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & J_3(1) & & \\ & & J_3(-1) & \\ & & & J_2(0) \end{pmatrix}$$

3. 解: $\chi_A = |tE-A| = (t-2)^2(t+1) \Rightarrow t_1=2,\ t_2=-1$

$(2E-A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -a & 0 & 0 \\ -b & -c & 3 \end{pmatrix}$. $\quad 3-\mathrm{rank}(2E-A) = \dim V^2$

$a=0,\quad \dim(V^2) = 3-1 = 2.$

$a\neq 0,\quad \dim(V^2) = 3-2 = 1.$

$(-E-A) = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ -a & -3 & 0 \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}$ $\quad a=0,\quad \dim(V^1) = 3-2 = 1$

$3-\mathrm{rank}(-E-A) = \dim(V^1)$ $\quad a\neq 0,\quad \dim(V^1) = 3-2 = 1$

$$J_A = \begin{cases} \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & -1 \end{pmatrix}, & a=0 \\ \begin{pmatrix} J_2(2) & \\ & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \\ & 2 & \\ & & -1 \end{pmatrix}, & a\neq 0 \end{cases}$$

4. (1) $\chi_A(t) = (t-3)^4(t+2)$

$\mathrm{rank}(A-3E) = 2. \Rightarrow \dim V^3 = 5-2 = 3.$

$\Rightarrow J_A$ 中以 3 为特征值的 Jordan 块出现 3 次.

3 代数重数为 4 $\quad \boxed{4 = 1+1+2}$

$$J_A = \begin{pmatrix} 3 & & & & \\ & 3 & & & \\ & & 3 & 1 & \\ & & & 3 & \\ & & & & -2 \end{pmatrix}.$$

(2) (i) $\mathrm{rank}(A-3E) = 1, \quad \dim V^3 = 4$

$$J_A=\begin{pmatrix}3&&&&\\&3&&&\\&&3&&\\&&&3&\\&&&&-2\end{pmatrix}$$

(ii) $\mathrm{rank}(A-3E)=3$, $\dim V^3=5-3=2$

$4=\boxed{2}+\boxed{2}$

$\underline{1+3}$

$$J_A=\begin{pmatrix}-2&&\\&J_2(3)&\\&&J_2(3)\end{pmatrix}\quad 或\quad J_A=\begin{pmatrix}-2&&\\&3&\\&&J_3(3)\end{pmatrix}$$

J_A 不能唯一地被复原

(iii) $\mathrm{rank}(A-3E)=4$ 时，$\dim V^3=1$.

$$J_A=\begin{pmatrix}-2&\\&J_4(3)\end{pmatrix}.$$

$Ax=\lambda x \Rightarrow A^kx=\lambda^k x=0$
$\Rightarrow \lambda=0\ (x\neq 0)$

$\exists m\in\mathbb{N}$, s.t. $A^m=0$

$\Rightarrow \boxed{\chi_A=t^n}$

5. $A\in M_n(\mathbb{C})$, $tr(A^k)=0$, $k=1,2,\cdots,n$, 则 A 是幂零的.

pf: 设 $\underline{\chi_A=t^{n_0}(t-\lambda_1)^{\boxed{n_1}}\cdots(t-\lambda_s)^{\boxed{n_s}}}$, 其中 $\lambda_1,\cdots,\lambda_s\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$, 两两不同

复数域上任一矩阵可上三角化和，$\exists P\in GL_n(\mathbb{C})$. 上三角复矩阵 B, 使得.

$B=P^{-1}AP$

$$B=\begin{pmatrix}\underbrace{0\cdots 0}_{n_0}&&&&*\\&\underbrace{\lambda_1\cdots\lambda_1}_{n_1}&&&\\&&\ddots&&\\&&&\underbrace{\lambda_s\cdots\lambda_s}_{n_s}\end{pmatrix},\quad \boxed{B^k}=P^{-1}\boxed{A^k}P \text{ 为上三角矩阵,}$$

$$B^k=\begin{pmatrix}\underbrace{0\cdots 0}_{n_0}&&&\\&\underbrace{\lambda_1^k\cdots\lambda_1^k}_{n_1}&&\\&&\ddots&\\&&&\underbrace{\lambda_s^k\cdots\lambda_s^k}_{n_s}\end{pmatrix}$$

$A^k\sim_s B^k \Rightarrow tr(B^k)=tr(A^k)=0$ (trace 是相似不变量)

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{s} n_i\lambda_i^k=0$, $k=1,2,\cdots s$

$$\Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_s \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_s^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^s & \lambda_2^s & \cdots & \lambda_s^s \end{pmatrix}}_{G} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ \vdots \\ n_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|G| = \underline{\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_s} \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_s \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{s-1} & \lambda_2^{s-1} & \cdots & \lambda_s^{s-1} \end{vmatrix}}_{\neq 0} \neq 0.$$

$\Rightarrow n_1 = n_2 = \cdots = n_s = 0.$

$\Rightarrow \chi_A(t) = t^{n_0} = t^n.$

由 Hamilton-Cayley 定理, $A^n = 0$, 从而 A 是幂零的.

注: 命题反之也成立.

A 幂零 $\Rightarrow A \sim_s \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad tr(A) = 0$

$tr(A^k) = 0, \ k = 1, 2 \cdots s$

$A^k \sim_s \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix}$

6. 设 $A \in \mathcal{L}(V)$, V 是 A-循环的, 设 $\lambda \in spec_F(A)$, 证明: $\dim(V^\lambda) = 1$.

Pf: claim: 设 $A \in \mathcal{L}(V)$, V 是 A-循环的, $U \subset V$ 是 A-不变的, 则 U 是 A-循环的.

pf: 设 $V = F[A]\cdot\vec{v}$. 不妨设 $U \neq \{\vec{0}\}$. 设 $\boxed{S = \{f \in F[t] \mid f(A)\vec{v} \in U\}}$.

注意到 $S \neq \{0\}$. 设 g 是 S 中非零次数最小的多项式.

令 $\vec{w} = g(A)\vec{v}$. 注意到 $\vec{w} \in U$.

下证 $U = F[A]\cdot W$

$\supseteq$

U 是 A 不变的. $\Rightarrow$ $F[A]\cdot w \subset U$.

$a_i A^i + \cdots + a_0 A^0$

(练习) U 是 A-不变的，则 U 是 $p(A)$-不变的. $p \in F[t]$.

U 是 A^i-不变的.

另一方面，设 $\vec{u} \in U \subseteq V$，则 $\exists\ f \in F[t]$，s.t. $\underset{U}{\vec{u}} = f(A)\vec{v}$.

$\Rightarrow f \in S$

由带余除法可知 $\exists\ q, r \in F[t]$, s.t.

$$f(t) = q(t)g(t) + r(t), \quad \deg_t(r) < \deg_t(g)$$

$$\underbrace{f(A)\vec{v}}_{\in U} = q(A)\underbrace{g(A)\vec{v}}_{\in U} + r(A)\vec{v}$$

$\Rightarrow r(A)\vec{v} \in U$

$\Rightarrow r = 0$ （g 的极小性）

$\Rightarrow \vec{u} = f(A)\vec{v} = q(A)(g(A)\vec{v}) = q(A)\vec{w} \in F[A]\cdot\vec{w}$

$\Rightarrow U = F[A]\cdot\vec{w}$

由特征子空间 V^λ 是 A-不变的，根据 V 是 A-循环的，可知 V^λ 是 A-循环

$\Rightarrow \exists\ \vec{w} \in V^\lambda$, s.t. $V^\lambda = F[A]\cdot\vec{w}$

$$\dim(F[A]\cdot\vec{w}) = \deg_t(\mu_{A,\vec{w}})$$

$A\vec{w} = \lambda w$. $\Rightarrow$ $\mu_{A,\vec{w}} = t - \lambda$.

$f(A)(\vec{w}) = 0$ 中次数最小(非零)

$\Rightarrow \dim(V^\lambda) = \dim(F[A]\cdot\vec{w}) = 1$.

$\to \cdots$

例 $n>1$, $\underset{\substack{\frown \\ \text{体} \\ M_n(\mathbb{C})}}{X}^2 = J_n(0)$ 无解

pf: 假设 $X^2 = J_n(0) \Rightarrow X^{2n} = J_n^n(0) = 0$

$\Rightarrow X$ 幂零 $\qquad \to P^{-1}XP = B. \qquad B^2 = P^{-1}X^2P$

$\Rightarrow X$ 的特征值只有 0 $\qquad X^2 = P^{-1}B^2X$

$$\Rightarrow \quad J(X) = \overset{B}{\overset{\parallel}{\begin{pmatrix} J_{n_1}(0) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{n_k}(0) \end{pmatrix}}}_{k\geq 1}, \quad \text{rank}(J_{n_i}(0)) = n_i - 1$$

$n_1 + \cdots + n_k = 0$

$$X^2 \sim_s \begin{pmatrix} J_{n_1}^2(0) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{n_k}^2(0) \end{pmatrix}, \quad \text{rank}(J_{n_i}^2(0)) = n_i - 1 - 1 = n_i - 2.$$

$\Rightarrow \text{rank}(X^2) = n_1 - 2 + \cdots + n_k - 2 = n - 2k < \underbrace{n-1}_{} = \text{rank}(J_n(0))$.

$\longrightarrow \quad \Longleftarrow$

$\Rightarrow X^2 = J_n(0)$ 无解.

注: $A \in M_n(\mathbb{C})$. $\quad A$ 幂零 $\Leftrightarrow$ A 的特征值只有 0 (复数域中).

"$\Rightarrow$" ✓

"$\Leftarrow$" 特征值只有 0 $\Rightarrow \chi_A = t^n \Rightarrow A^n = 0 \Rightarrow A$ 幂零.

例 $A, B \in M_n(\mathbb{C})$. 证明: 如果 $AB - BA = B$, 则 B 是幂零的

pf: $\exists P \in GL_n(\mathbb{C})$. 就 $B = P^{-1}J_BP$.

$AB - BA = B \Rightarrow A(P^{-1}J_BP) - (P^{-1}J_BP)A = P^{-1}J_BP$

$\Rightarrow (PAP^{-1})J_B - J_B(PAP^{-1}) = J_B$.

令 $C = PAP^{-1}$, 有 $CJ_B - J_BC = J_B \quad (1)$

令 $J_B=\begin{pmatrix} J_{d_1}(\lambda_1) & & \\ & J_{d_2}(\lambda_2) & \\ & & \ddots \\ & & & J_{d_k}(\lambda_k)\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} \boxed{C_{d_1}} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{C_{d_k}}\end{pmatrix}$

(1) 变为了 $\boxed{C_i J_{d_i}(\lambda_i) - J_{d_i}(\lambda_i) C_i = J_{d_i}(\lambda_i)}$

从而问题可以转化为 $\boxed{A J_n(\lambda) - J_n(\lambda) A = J_n(\lambda) \Rightarrow \lambda = 0}$ ☆

$$A(\lambda E_n + J_n(0)) - (\lambda E_n + J_n(0))A = \lambda E_n + J_n(0)$$

$$\Rightarrow A J_n(0) - J_n(0) A = \lambda E_n + J_n(0)$$

设 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}$ $\quad J_n(0)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} \\ 0 & a_{21} & a_{32} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0\end{pmatrix} = \lambda E_n + J_n(0)$$

用trace 作用,

$$\Rightarrow (0 + a_{21} + a_{32} + \cdots + a_{n,n-1}) - (a_{21} + a_{32} + \cdots + a_{n,n-1} + 0) = n\lambda$$

$$\Rightarrow n\lambda = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = 0$$

广义特征子空间

特征子空间 V^{λ}

定义: 设 $A \in \mathcal{L}(V)$. $\mu_A = P_1^{m_1} \cdots P_s^{m_s}$ 是 μ_A 在 $F[t]$ 中的不可约分解, 即 $P_1, \cdots, P_s$ 两两互素, 不可约, 首一多项式, $m_1, \cdots, m_s \in \mathbb{Z}^+$. $\forall i = 1, 2, \cdots, s$. 令

$$V(P_i) = \ker(P_i^{m_i}(A))$$

称 $V(p_i)$ 是 $\mathcal{A}$ 关于 p_i 的广义特征子空间.

注: $V(p_i)$ 是 $\mathcal{A}$-不变的.

引理 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, $p, q \in F[t]$ 且 $\gcd(p,q)=1$, 则 $p(\mathcal{A})$ 是 $\ker(q(\mathcal{A}))$ 上的可逆算子.

解: 下证 $\boxed{p(\mathcal{A}) \in \mathcal{L}(\ker(q(\mathcal{A})))}$, 只需证

$\ker(q(\mathcal{A}))$ 是 $p(\mathcal{A})$-不变的.

由于 $\ker q(\mathcal{A})$ 是 $\mathcal{A}$-不变的, 则 $\ker(q(\mathcal{A}))$ 是 $p(\mathcal{A})$-不变的.

下证 $\ker(p(\mathcal{A})|_{\ker(q(\mathcal{A}))}) = \{\vec{0}\}$.

$\forall \vec{x} \in \ker(q(\mathcal{A}))$, s.t $\underline{p(\mathcal{A})(\vec{x}) = \vec{0}}$

$\gcd(p,q)=1 \Rightarrow \exists f, g \in F[t]$, s.t $f(t)p(t)+g(t)q(t)=1$

$\Rightarrow f(\mathcal{A})p(\mathcal{A}) + g(\mathcal{A})q(\mathcal{A}) = \mathcal{E}$

$\vec{x} = f(\mathcal{A})\underbrace{(p(\mathcal{A})\vec{x})}_{\vec{0}} + g(\mathcal{A})\underbrace{(q(\mathcal{A})\vec{x})}_{\vec{0}}$

$\Rightarrow \vec{x} = \vec{0}$

$\Rightarrow \ker(p(\mathcal{A})|_{\ker(q(\mathcal{A}))}) = \{\vec{0}\}$

$\Rightarrow p(\mathcal{A})$ 是 $\ker(q(\mathcal{A}))$ 上的可逆算子.

回顾 (扩展的核分解定理)

设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, $\mu_{\mathcal{A}} = p_1^{m_1} \cdots p_s^{m_s}$. 不可约分解. 令

$K_i = \ker(p_i^{m_i}(\mathcal{A}))$, $\mathcal{A}_i = \mathcal{A}|_{K_i}$, 则

$V = K_1 \oplus \cdots \oplus K_s$.

$\mu_{\mathcal{A}_i} = p_i^{m_i}$, $i=1,2,\cdots,s$.

(广义特征子空间分解, 一般小多项式版) 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$. $\mu_{\mathcal{A}} = p_1^{m_1} \cdots p_s^{m_s}$ 是

μ_A 在 $F[t]$ 中的不可约分解. 则下述结论成立

① $V = V(P_1) \oplus \cdots \oplus V(P_s)$

② 设 $A_i = \mathcal{A}|_{V(P_i)}$, 则 $\mu_{A_i} = P_i^{m_i}$, $i=1,2,\cdots,s$.

扩展的准素分解定理.

③ $\forall i \in \{1,\cdots,s\}$, $P_i(A)$ 是 $V(P_1)+\cdots+V(P_{i-1})+V(P_{i+1})+\cdots+V(P_s)$

上的可逆算子.

Pf: ③ 不妨设 $i=1$. $P_1(A) \in \mathcal{L}(V(P_2)+\cdots+V(P_s))$ → 自己验证

$\boxed{\forall \vec{x} \in V(P_2)+\cdots+V(P_s) \text{ 假设 } P_1(A)\vec{x}=0. \text{ 下证 } \vec{x}=\vec{0}}$

$V(P_j)$ 是 $P_1(A)$ 不变的 ★

则 $\exists\ x_j \in V(P_j)$, $j=2,\cdots,m$, s.t

$$\vec{x} = \vec{x_2} + \cdots + \vec{x_s},$$

$$\underset{0}{P_1(A)\vec{x}} = \underset{V(P_2)}{P_1(A)\vec{x_2}} + \cdots + \underset{V(P_s)}{P_1(A)\vec{x_s}}$$

$V(P_j)$ 是 $P_1(A)$ 不变的 对 $i=2,\cdots,s$.

$\gcd(P_1, P_j^{m_j})=1$ + 引理. 中证明

由直和的定义 $\Rightarrow$ $P_1(A)(\vec{x_2}) = \cdots = P_1(A)(\vec{x_s}) = 0$

$$\Rightarrow \vec{x_2} = \cdots = \vec{x_s} = 0$$

($\because \gcd(P_1, P_j^{m_j})=1 \Rightarrow P_1(A)$ 是 $V(P_j)$ 上的可逆算子)

$$\Rightarrow \vec{x} = 0$$

例 $A = \begin{pmatrix} B & \\ & C \end{pmatrix}_{4\times4}$ 其中 $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

把 A 看成 $\mathbb{R}^4$ 上的线性算子. 在标准基 $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}, \vec{e_4}$ 下矩阵为 A 的线性算子. 计算 A 的广义特征子空间分解

Pf: $\mu_A = \operatorname{lcm}(\mu_B, \mu_C) = \operatorname{lcm}(t^2, (t-1)^2) = \boxed{t^2}\boxed{(t-1)^2}$.

$p_1 = t \quad , p_2 = t-1$

$$A^2 = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \underbrace{\boxed{\begin{matrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{matrix}}}_{C^2} \end{pmatrix} \quad . \quad V(t) = \langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle$$

$$(A-E)^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad V(t-1) = \langle \vec{e}_3, \vec{e}_4 \rangle$$

$$V = V(t) \oplus V(t-1) = \langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle \oplus \langle \vec{e}_3, \vec{e}_4 \rangle$$

例 $A \in \mathcal{L}(V)$ 是可对角化的，则 V 关于 A 的广义特征子空间的分解就是 A 的特征子空间分解。

pf: $\mu_A = (t-\lambda_1) \cdots (t-\lambda_k)$, 其中 $\lambda_1, \cdots, \lambda_k \in F$ 互不同

$$V(t-\lambda_i) = \ker(A-\lambda_i E) = \{ \vec{x} \in V \mid A\vec{x} = \lambda_i \vec{x} \} = V^{\lambda_i}$$

$$V = V(t-\lambda_1) \oplus \cdots \oplus V(t-\lambda_k) = V^{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V^{\lambda_k}.$$

参见 李老师 讲义 2019 ~ 2020. 13.2 ~ 5. 习题课讲义.