可对角化判别法.

V F-向量空间. $\mathscr{A}\in L(V)$.

$\mathscr{A}$可对角化

Ⅰ ∃基 $e_1,\cdots,e_n$ s.t. $\mathscr{A}(e_1,\cdots,e_n)=(e_1,\cdots,e_n)\cdot\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$

Ⅱ $\mathrm{Spec}_F(\mathscr{A})=\{\lambda_1,\cdots,\lambda_k\}$, 且 $V=V^{\lambda_1}+\cdots+V^{\lambda_k}$.

Ⅲ $\mathrm{Spec}_F(\mathscr{A})=\{\lambda_1,\cdots,\lambda_k\}$, $\dim V=\dim V^{\lambda_1}+\cdots+\dim V^{\lambda_k}$.

Ⅳ $\chi_{\mathscr{A}}(t)$在F中可分解为一次因式乘积, $\forall\lambda\in F$为其特征值. 其几何重数等于代数重数.

Ⅴ $\mu_{\mathscr{A}}(t)$在$F[t]$中可分解为两两互素的一次因子乘积.

作业.

1. $A=\begin{pmatrix}-1 & 3 & -1\\ -3 & 5 & -1\\ -3 & 3 & 1\end{pmatrix}$ $\chi_A(t)=\det(tE-A)=\begin{vmatrix}t+1 & -3 & 1\\ 3 & t-5 & 1\\ 3 & -3 & t-1\end{vmatrix}$

$=(t-1)(t-2)^2$

$\chi_A(t)=0$, $t_1=1$ $t_2=2$, $1,2\in F$.

i.e. A的特征值均在F中.

$\dim V^{t_1}=3-\mathrm{rk}(t_1E-A)=\cdots$

t_1的几何重数≤代数重次. $1\le\dim V^{t_1}\le 1\Rightarrow\dim V^{t_1}=1$

$\dim V^{t_2}=3-\mathrm{rk}(t_2E-A)$, $t_2E-A=\begin{pmatrix}3 & -3 & 1\\ 3 & -3 & 1\\ 3 & -3 & 1\end{pmatrix}$ $\mathrm{rk}(t_2E-A)=1$

$\dim V^{t_2} = 2$.

$$\Rightarrow \quad \dim V = \dim V^{t_1} + \dim V^{t_2}.$$

$\Rightarrow A$ 可对角化. $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A \sim_s B$.

3.

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{n\times n} \in M_n(\mathbb{C}).$$

(i) 证明: C 可对角化.

$$\chi_A(t) = \det(tE - C) = \begin{vmatrix} t & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & t & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & t \end{vmatrix}$$

$$= t \cdot \begin{vmatrix} t & -1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & -1 \\ 0 & & & t \end{vmatrix} + (-1)^{n+1}(-1) \begin{vmatrix} -1 & & & 0 \\ t & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & t & -1 \end{vmatrix}$$

$$= t^n - 1$$

$\chi_A(t) = (t-\varepsilon_0)\cdot(t-\varepsilon_1)\cdot \cdots \cdot (t-\varepsilon_{n-1}) \qquad \varepsilon_k = e^{\frac{2\pi i}{n}\cdot k} = (\varepsilon_1)^k$

$\chi_A(t)$ 在$\mathbb{C}$上可解为互不相同的一次多项式乘积, 故而可对角化.

进而 $\exists P \in GL_n(\mathbb{C})$, s.t. $P^{-1}CP = \begin{pmatrix} \varepsilon_0 & & & \\ & \varepsilon_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \varepsilon_{n-1} \end{pmatrix}$

(ii) $f \in \mathbb{C}[t]$, 记算 $\det(f(C))$.

设 $f = \sum_i a_i x^i$, $\quad f(C) = \sum_i a_i C^i$

$P^{-1}C^iP = (P^{-1}CP)^i = \begin{pmatrix} \varepsilon_0^i & & \\ & \ddots & \\ & & \varepsilon_{n-1}^i \end{pmatrix} \Rightarrow P^{-1}f(C)P = \sum_i a_i \begin{pmatrix} \varepsilon_0^i & & \\ & \ddots & \\ & & \varepsilon_{n-1}^i \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow P^{-1}f(C)P = \begin{pmatrix} f(\xi_0) & & \\ & \ddots & \\ & & f(\xi_{n-1}) \end{pmatrix} \quad \det(f(C)) = f(\xi_0)\cdots\cdots f(\xi_{n-1}).$$

Q：$C\in M_n(\mathbb{R})$，C 是否可对角化？ $\forall f\in\mathbb{R}[t]$，$\det(f(C))$？

4.

$$A=\begin{pmatrix} a & * & \cdots & * \\ & a & \cdots & * \\ & & \ddots & * \\ & & & a \end{pmatrix}\in M_n(F). \quad *\text{部分不全为}0.$$

判断 A 是否可对角化？

证：$\chi_A(t)=\det(tE-A)=(t-a)^n \quad a\in F.$

$$\dim V^{t=a}=n-\mathrm{rk}(aE-A).$$

$$aE-A=\begin{pmatrix} 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & * \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$，由于 $*$部分不全为0，故而 $\mathrm{rk}(aE-A)\geq 1$

$\Rightarrow \dim V^a < n=\dim V$、$\Rightarrow$ A 不可对角化.

线性代数的一个目的是分类线性映射 $\mathcal{A}\in L(V)$.

Recall：• $\mathcal{A}\in L(V)$，称 V 是 $\mathcal{A}$不可分的 若 不存在 $V_1, V_2\subset V$，V_1, V_2 $\mathcal{A}$-不变，且 $V=V_1\oplus V_2$.

• V 可分解为若干 $\mathcal{A}$-不可分子空间的直和.

命题：$\mathscr{A}$可对角化 $\Leftrightarrow$ V可分解为一些一维$\mathscr{A}$不变子空间的直和

Pf： $\mathscr{A}$可对角化

$\Leftrightarrow$ ∃基 $e_1,\cdots,e_n$ s.t. $\mathscr{A}(e_1,\cdots,e_n)=(e_1,\cdots,e_n)\cdot\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{pmatrix}$

"$\Rightarrow$" $V_i=\langle e_i\rangle$， V_i $\mathscr{A}$不变，$\dim V_i=1$.

"$\Leftarrow$" $\cdots\cdots$. □

一维不变子空间一定不可分.

可对角化矩阵是很特殊的一类，从线性映射角度而言.

2. $\mathscr{A}\in L(V)$，$f\in F[t]$

(i) 若 λ 为$\mathscr{A}$的特征值，则 $f(\lambda)$为$f(\mathscr{A})$的特征值.

(ii) 若 v 为$\mathscr{A}$的特征向量，则 v 也为 $f(\mathscr{A})$ 的特征向量.

Pf：设 v 为 $\mathscr{A}$ 以 λ 对应的特征向量，$v\neq 0$.

$$\mathscr{A}v=\lambda v \qquad f=\sum_i a_i t^i \qquad f(\mathscr{A})=\sum_i a_i\mathscr{A}^i$$

$$\mathscr{A}^i v=\mathscr{A}^{i-1}(\mathscr{A}v)=\lambda\mathscr{A}^{i-1}v=\cdots=\lambda^i v.$$

$$f(\mathscr{A})\cdot v=\left(\sum_i a_i\mathscr{A}^i\right)\cdot v=\sum_i\left(a_i\cdot\mathscr{A}^i v\right)=\left(\sum_i a_i\cdot\lambda^i\right)v$$
$$=f(\lambda)\cdot v$$

即 v是$f(\mathscr{A})$以$f(\lambda)$为特征值的向量.

5. $F=\mathbb{C}$, $\mathcal{A},\mathcal{B}\in L(V)$, $\mathcal{A}\mathcal{B}=\mathcal{B}\mathcal{A}$, 证明：$\mathcal{A}$和$\mathcal{B}$有公共特征向量.

注：$\mathcal{A},\mathcal{B}\in L(V)$, 我们有时会考虑是否存在一组基 s.t. $\mathcal{A},\mathcal{B}$在这组基下矩阵同时且有好形式.

eg: $A,B\in M_n(F)$, 是否 $\exists P\in GL_n(F)$, s.t. $P^{-1}AP$, $P^{-1}BP$ 具有"良好形状"

证明：由于$F=\mathbb{C}$, $\mathcal{A}$存在特征值λ, 从而 $\dim V_{\mathcal{A}}^{\lambda}>0$.

断言：$V_{\mathcal{A}}^{\lambda}$ 是 $\mathcal{B}$不变子空间.

证：$v\in V_{\mathcal{A}}^{\lambda}$ $\mathcal{A}v=\lambda v$.

$$\mathcal{A}(\underline{\mathcal{B}v})=\mathcal{B}(\mathcal{A}v)=\mathcal{B}\lambda v=\lambda\underline{\mathcal{B}v}$$

$$\Rightarrow \mathcal{B}v\in V_{\mathcal{A}}^{\lambda}.$$

$V_{\mathcal{A}}^{\lambda}$ 是 $\mathcal{B}$不变, $\mathcal{B}'=\mathcal{B}|_{V_{\mathcal{A}}^{\lambda}}$, $\mathcal{B}'$为$\mathbb{C}$-向量空间的线性映射

从而 $\mathcal{B}'$存在特征值λ', λ'有特征向量 $v\in V_{\mathcal{A}}^{\lambda}$.

$v\in V_{\mathcal{A}}^{\lambda} \Rightarrow \mathcal{A}v=\lambda v$

$\mathcal{B}'v=\lambda'v$, $\mathcal{B}'v=\mathcal{B}v$ i.e. $\mathcal{B}v=\lambda'v$.

$\Rightarrow v$同时为$\mathcal{A}$和$\mathcal{B}$的特征向量. □

例：设 $\mathcal{A},\mathcal{B}\in L(V)$, V为$\mathbb{C}$线性空间, $\mathcal{A}\mathcal{B}=\mathcal{B}\mathcal{A}$.

则$\exists V$的一组基 $v_1,\dots,v_n$ s.t. $\mathcal{A},\mathcal{B}$在这组基下矩阵同时为上三角形.

证：由5题，$\exists\, e_1$ 同时为 $\mathcal{A},\mathcal{B}$ 的特征向量. 从而 $V_1=\langle e_1\rangle\subset V$.

V_1 $\mathcal{A}$-不变且 $\mathcal{B}$-不变.

考虑商空间 $\bar{V}:=V/V_1$，由于 V_1 是 $\mathcal{A},\mathcal{B}$ 不变.

我们有映射 $\bar{\mathcal{A}},\bar{\mathcal{B}}\in L(\bar{V})$.

$$\bar{\mathcal{A}}:\bar{V}\longrightarrow\bar{V},\quad \bar{v}\longmapsto\overline{\mathcal{A}v}\qquad\qquad \bar{\mathcal{B}}:\bar{V}\longrightarrow\bar{V},\quad \bar{v}\longmapsto\overline{\mathcal{B}v}$$

$\mathcal{A}\mathcal{B}=\mathcal{B}\mathcal{A}\ \Longrightarrow\ \bar{\mathcal{A}}\bar{\mathcal{B}}=\bar{\mathcal{B}}\bar{\mathcal{A}}$

i.e. $\bar{\mathcal{A}}\bar{\mathcal{B}}(\bar{v})=\bar{\mathcal{A}}(\overline{\mathcal{B}v})=\overline{\mathcal{A}\mathcal{B}(v)}$

$\cdots\cdots\quad=\overline{\mathcal{B}\mathcal{A}(v)}$

我们可以对维数 n 归纳证明该命题.

$\dim V=1$，✓

若对 $\dim V=n-1$ 成立，

$\dim V=n$ 时，由如上讨论，知 $\exists\ \bar{V}$ 的一组基

$\bar{e}_2,\cdots,\bar{e}_n$ s.t. $\bar{\mathcal{A}},\bar{\mathcal{B}}$ 在这组基下矩阵为上三角形.

$e_2,\cdots,e_n\in V$

i.e. $\bar{\mathcal{A}}(\bar{e}_2,\cdots,\bar{e}_n)=(\bar{e}_2,\cdots,\bar{e}_n)\begin{pmatrix}a_{22}&\cdots&a_{2n}\\ &\ddots&\vdots\\ 0&&a_{nn}\end{pmatrix}$ A_0

$\bar{\mathcal{B}}(\bar{e}_2,\cdots,\bar{e}_n)=(\bar{e}_2,\cdots,\bar{e}_n)\begin{pmatrix}b_{22}&\cdots&b_{2n}\\ &\ddots&\vdots\\ 0&&b_{nn}\end{pmatrix}$ B_0.

$\bar{V}=V/V_1$，$V=\langle e_1\rangle$，$e_1,\cdots,e_n$ 为 V 的基

$\mathcal{A}(e_1,\cdots,e_n)=(e_1,\cdots,e_n)\left(\begin{array}{c|c}\alpha&*\ *\ *\\ \hline 0&A_0\end{array}\right)$ 其中 $\mathcal{A}e_1=\alpha e_1$

同理 $\mathscr{B}(e_1,\cdots,e_n)=(e_1,\cdots,e_n)\begin{pmatrix}\beta & * & * & * \\ 0 & & B_0 & \end{pmatrix}$ 即 $\mathscr{B}e_1=\beta e_1$. □

推论：若 $A,B\in M_n(\mathbb{C})$，$AB=BA$，且 B 是幂零的，则 $\chi_A(t)=\chi_{A+B}(t)$.

证：由于 $AB=BA$，知 $\exists\ P$ s.t.

$$S=P^{-1}AP \qquad T=P^{-1}BP$$

同时为上三角矩阵。

由于 B 幂零 $\quad B^k=0 \Leftrightarrow P^{-1}B^kP=(P^{-1}BP)^k=T^k=0$

$\Rightarrow T$ 是一个上三角的幂零阵.

因而设 $S=\begin{pmatrix} s_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & s_n\end{pmatrix} \qquad T=\begin{pmatrix} 0 & & *' \\ & \ddots & \\ 0 & & 0\end{pmatrix}$

$\chi_A=\chi_S$, $\qquad \chi_{A+B}$, $\quad A+B\sim_S S+T$

从而 $\chi_{A+B}=\chi_{S+T}$

$S+T=\begin{pmatrix} s_1 & & *'' \\ & \ddots & \\ & & s_n\end{pmatrix}$

$\chi_S=(t-s_1)\cdots\cdots(t-s_n)$

$\chi_{S+T}=(t-s_1)\cdots(t-s_n)$. □

命题：$\mathscr{A},\mathscr{B}\in L(V)$（F代数闭域）. $\mathscr{C}=\mathscr{A}\mathscr{B}-\mathscr{B}\mathscr{A}$，若 $\mathrm{rk}(\mathscr{C})\leq 1$，

则 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{B}$ 有共同特征向量。

Lem: $\mathscr{A},\mathscr{B}\in L(V)$，$\mathscr{C}=\mathscr{A}\mathscr{B}-\mathscr{B}\mathscr{A}$，则下面命题三一成立。

① $\ker(\mathscr{A})\subseteq\ker(\mathscr{C})$.

② $\mathrm{im}(\mathscr{C})\cap\mathrm{im}(\mathscr{A})\neq\{0\}$.

证：若①不成立，i.e. $\ker(\mathscr{A})\nsubseteq\ker(\mathscr{C})$.

则 $\exists x\in\ker(\mathscr{A})$，$\mathscr{C}(x)\neq 0$.

$0\neq y=\mathscr{C}(x)=(\mathscr{A}\mathscr{B}-\mathscr{B}\mathscr{A})(x)=\mathscr{A}\mathscr{B}(x)-\mathscr{B}\mathscr{A}(x)=\mathscr{A}\cdot(\mathscr{B}(x))$

$\Rightarrow y\in\operatorname{im}\mathscr{A}$. $y\in\operatorname{im}(\mathscr{C})$.

$\Rightarrow y\in\operatorname{im}\mathscr{C}\cap\operatorname{im}\mathscr{A}\neq\{0\}$.

命题的证明：我们对 V 的维数归纳.

$\dim V=n$，$n=1$ ✓.

若命题对 $\dim V\leq n-1$ 成立．$\dim V=n$ 时.

① $\mathscr{A}=0$，✓． $\operatorname{rk}\mathscr{A}=n$ 取 $\mathscr{A}$ 的一个特征值 λ，
考虑 $\mathscr{A}'=\mathscr{A}-\lambda\mathscr{E}$，则 $\operatorname{rk}\mathscr{A}'<n$. $\mathscr{A}'$ 的特征向量也为 $\mathscr{A}$ 的特征向量. 我们不妨假设 $0<\operatorname{rk}\mathscr{A}<n$.

② ②-1 若 $\ker(\mathscr{A})\subseteq\ker(\mathscr{C})$，验证 $\ker(\mathscr{A})$ 为 $\mathscr{B}$ 不变的.
$\dim\ker\mathscr{A}\neq 0$，对 $\mathscr{A}|_{\ker\mathscr{A}}$，$\mathscr{B}|_{\ker\mathscr{A}}$ 用归纳.

②-2 若 $\operatorname{im}(\mathscr{A})\cap\operatorname{im}(\mathscr{C})\neq\{0\}$. 验证 $\operatorname{im}\mathscr{A}$ $\mathscr{B}$ 不变的，
$\dim(\mathscr{A})\geq 1$，从而可对 $\mathscr{A}|_{\operatorname{im}\mathscr{A}}$，$\mathscr{B}|_{\operatorname{im}\mathscr{A}}$ 用归纳. □