定义 对角化. $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$，如果$\mathcal{A}$在$V$的某组基下的矩阵是对角矩阵，则称$\mathcal{A}$是可对角化的。

$A\in M_n(F)$，若$A\sim_s \mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$，$\lambda_i\in F$，则称$A$是可对角化的.

判别方法，

$n=\dim(V)$，$\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$.

(1) $\mathcal{A}$可对角化 $\Leftrightarrow$ $\mathcal{A}$有n个线性无关的特征向量.

对角化的方法. A可对角化，找到n个线性无关的特征向量$\vec{v_1},\cdots,\vec{v_n}$，

令$P=(\vec{v_1},\cdots,\vec{v_n})$，$P^{-1}AP$是对角矩阵

推论 如果χ_A在F中有n个不同的根，则A是可对角化的

(2) $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$且$\mathrm{spec}_F(\mathcal{A})=\{\lambda_1,\cdots,\lambda_k\}$.

$\mathcal{A}$可对角化 $\Leftrightarrow$ $V=V^{\lambda_1}+\cdots+V^{\lambda_k}$.

(3) 设$\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$且$\mathrm{spec}_F(\mathcal{A})=\{\lambda_1,\cdots,\lambda_k\}$，则$\mathcal{A}$可对角化 $\Leftrightarrow$ $\dim(V^{\lambda_1})+\cdots+\dim(V^{\lambda_k})=\dim(V)$.

(4) $\mathcal{A}$可对角化当且仅当以下两个条件成立.

① $\chi_{\mathcal{A}}(t)$在$F[t]$中可以分解为一次因子之积，即$\chi_{\mathcal{A}}(t)$的所有根都在F中.

② $\forall\lambda\in\mathrm{spec}_F(\mathcal{A})$，$\lambda$的$\underbrace{\text{几何重数}}_{\dim(V^{\lambda})}$等于它的$\underbrace{\text{代数重数}}_{\lambda\text{在}\chi_A(t)\text{中的重数}}$.

注：λ的代数重数 $\geq$ 几何重数.

(5) $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$，则$\mathcal{A}$可对角化 $\Leftrightarrow$ $\chi_{\mathcal{A}}(t)$在$F[t]$中可以分解为两两互素一次因子之积.

作业.

$A=\begin{pmatrix}-1&3&-1\\-3&5&-1\\-3&3&1\end{pmatrix}$，$\chi_A(t)=\det(tE-A)=\begin{vmatrix}t+1&-3&1\\3&t-5&1\\3&-3&t-1\end{vmatrix}=(t-2)^2(t-1)$

$\Rightarrow t_1=1$，$t_2=2$

时 1 在 $\chi_A(t)$ 中的代数重数为 1，故 $\dim V^1 = 1$.

$$2E-A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \dim V^2 = 3-1 = 2$.

$\Rightarrow \dim V^1 + \dim V^2 = 1+2 = 3 = \dim V$

$\Rightarrow A$ 可对角化。

$$B = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$$

2 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, $f \in F[t]$,

(i) λ 是 $\mathcal{A}$ 的特征值，证明：$f(\lambda)$ 是 $f(\mathcal{A})$ 的特征值。

设 $f = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \cdots + a_0$，其中 $a_n \neq 0$.

$$f(\mathcal{A}) = \sum_{i=0}^{n} a_i \mathcal{A}^i.$$

若 λ 是 $\mathcal{A}$ 的特征值，则 $\exists\, \vec{v} \in V \setminus \{\vec{0}\}$, s.t. $\mathcal{A}\vec{v} = \lambda \vec{v}$.

$$\mathcal{A}^2 \vec{v} = \mathcal{A}(\mathcal{A}\vec{v}) = \mathcal{A}(\lambda \vec{v}) = \lambda \mathcal{A}\vec{v} = \lambda^2 \vec{v}$$

$\cdots\cdots$

$$\mathcal{A}^i \vec{v} = \lambda^i \vec{v}.$$

$$f(\mathcal{A})\vec{v} = \left(\sum_{i=0}^{n} a_i \mathcal{A}^i\right)\vec{v} = \sum_{i=0}^{n} a_i (\mathcal{A}^i \vec{v}) = \sum_{i=0}^{n} a_i (\lambda^i \vec{v})$$

$$= \left(\sum_{i=0}^{n} a_i \lambda^i\right)\vec{v} = f(\lambda)\vec{v}.$$

$\Rightarrow f(\lambda)$ 是 $f(\mathcal{A})$ 的特征值.

(ii) $\vec{v}$ 是 $\mathcal{A}$ 的特征向量，则 $\vec{v}$ 是 $f(\mathcal{A})$ 的特征值 $f(\lambda)$ 对应的特征向

量.

3. pf: (1) 计算 C 的特征多项式

$$\chi_C(t)=\begin{vmatrix} t & -1 & & & 0 \\ & t & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & -1 \\ -1 & & & & t \end{vmatrix} \xlongequal{\text{按第一列展开}} t\begin{vmatrix} t & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & -1 \\ & & & t \end{vmatrix} + (-1)^{n+2}\begin{vmatrix} -1 & & & \\ t & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & t & -1 \end{vmatrix}$$

$$= t\cdot t^{n-1} + (-1)^{n+2}(-1)^{n-1} = \underline{t^n-1}.$$

由于在 $\mathbb{C}$ 中, $\gcd(\chi_C, \chi_C') = \gcd(t^n-1, nt^{n-1}) = 1$.

$\Rightarrow$ χ_C 在 $\mathbb{C}$ 中有 n 个互不相同的根, 故 C 可对角化.

(2) 记 n 次单位根为 $\varepsilon_k = e^{\frac{2k\pi}{n}i}$, $k=0,1,\cdots,n-1$,

则 $\exists P\in GL_n(\mathbb{C})$, s.t.

$$C = P^{-1}\begin{pmatrix} \varepsilon_0 & & & \\ & \varepsilon_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \varepsilon_{n-1} \end{pmatrix}P.$$

则对 $\forall m\in N$,

$$C^m = P^{-1}\begin{pmatrix} \varepsilon_0 & & & \\ & \varepsilon_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \varepsilon_{n-1} \end{pmatrix}PP^{-1}\begin{pmatrix} \varepsilon_0 & & & \\ & \varepsilon_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \varepsilon_{n-1} \end{pmatrix}P\cdots P^{-1}\begin{pmatrix} \varepsilon_0 & & & \\ & \varepsilon_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \varepsilon_{n-1} \end{pmatrix}P$$

$$= P^{-1}\begin{pmatrix} \varepsilon_0^m & & & \\ & \varepsilon_1^m & & \\ & & \ddots & \\ & & & \varepsilon_{n-1}^m \end{pmatrix}P$$

设 $f=\sum_{i=0}^{d} a_i t^i$, 则

$$f(C) = \sum_{i=0}^{d} a_i C^i = \sum_{i=0}^{d} a_i P^{-1}\begin{pmatrix} \varepsilon_0^i & & & \\ & \varepsilon_1^i & & \\ & & \ddots & \\ & & & \varepsilon_{n-1}^i \end{pmatrix}P$$

$$= P^{-1}\begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{d}\varepsilon_0^i & & \\ & \sum_{i=0}^{d}\varepsilon_1^i & \\ & & \ddots \end{pmatrix}P.$$

$$\begin{pmatrix} & & \ddots & \\ & & & \sum_{i=0}^{d} \varepsilon_{n-1}^{i} \end{pmatrix}$$

$$= P^{-1} \begin{pmatrix} f(\varepsilon_0) & & & \\ & f(\varepsilon_1) & & \\ & & \ddots & \\ & & & f(\varepsilon_{n-1}) \end{pmatrix} P$$

$$\det(f(C)) = \det(P^{-1}) f(\varepsilon_0) f(\varepsilon_1) \cdots f(\varepsilon_{n-1}) \det(P)$$

$$= f(\varepsilon_0) \cdots\cdots f(\varepsilon_{n-1})$$

4. $A = \begin{pmatrix} a & * & \cdots & * \\ 0 & a & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a \end{pmatrix} \in M_n(F)$，~~其中~~$*$部分不全为0，证明：A不可对角化.

Pf: $\chi_A(t) = |tE - A| = (t-a)^n$.

$\Rightarrow \chi_A(t)$ 在$F[x]$中可以分解为一次因子之积且 a 是A的唯一特征根.

假设 A 可对角化，则 a 的几何重数等于 n.

从而 $aE - A = \begin{pmatrix} 0 & * & \cdots & * \\ & \ddots & & * \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 0 \end{pmatrix}$ 对应齐次线性方程组的解空间维数等于n.

$\Rightarrow \operatorname{rank}(aE - A) = 0$

$\Rightarrow *$ 全部为0.

$\rightarrow \Leftarrow$.

5. Pf: $\boxed{\text{claim: 若} V^\lambda \text{为} A \text{的特征子空间，则} V^\lambda \text{为} B \text{的不变子空间}}$ ☆

$\forall \vec{v} \in V^\lambda$, $A(B\vec{v}) = BA\vec{v} = B(\lambda\vec{v}) = \lambda B\vec{v}$.

$\Rightarrow B\vec{v} \in V^\lambda$.

$\Rightarrow V^\lambda$ 为 B 的不变子空间.

由于$F=\mathbb{C}$，故$\mathcal{A}$存在特征值λ，V^λ为其对应的特征子空间，由

$\downarrow$（命题7.1.5 $\angle$B2-4）

Claim可知，

$H = B|_{V^\lambda}$ 有效

$H \in \mathcal{L}(V^\lambda)$.

再次由$F=\mathbb{C}$，H存在特征值λ_1，对应一个特征向量$\vec{v}\in V^\lambda$ $\vec{v}\neq 0$

$\Rightarrow H(\vec{v}) = B\vec{v} = \lambda_1\vec{v}$.

又$\because \vec{v}\in V^\lambda$，故$\mathcal{A}\vec{v} = \lambda\vec{v}$

$\Rightarrow \vec{v}$是$\mathcal{A}$和$\mathcal{B}$共同的特征向量

定理 $\mathcal{A}$可对角化$\Leftrightarrow V$是一维$\mathcal{A}$-不变子空间的直和.

证："$\Rightarrow$" $\mathcal{A}$可对角化，则$\exists\, V$的一组基$\vec{e_1},\cdots,\vec{e_n}$，$\lambda_1,\cdots,\lambda_n\in F$，s.t

（λ_i不必两两不同）

$$\mathcal{A}(\vec{e_1},\cdots,\vec{e_n}) = (\vec{e_1},\cdots,\vec{e_n})\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

i.e. $\mathcal{A}\vec{e_i} = \lambda_i\vec{e_i}$

令$W_i = \langle\vec{e_i}\rangle$，$V = \bigoplus_{i=1}^{n} W_i$ 且 $\underbrace{\mathcal{A}W_i \subset W_i}_{W_i\text{是}\mathcal{A}\text{-子空间}}$，$\dim W_i = 1$.

"$\Leftarrow$" 若V是一维$\mathcal{A}$-子空间的直和，

$\exists\, W_i\subset V$，$\dim(W_i)=1$，s.t $V = W_1\oplus\cdots\oplus W_n$.

$\exists\, e_i\in V$，s.t $W_i = \langle e_i\rangle$，$i=1,2,\cdots,n$.

$\mathcal{A}W_i\subset W_i \Rightarrow \exists\,\lambda_i\in F$，s.t $\mathcal{A}\vec{e_i} = \lambda_i\vec{e_i}$. $i=1,2,\cdots,n$.

$\Rightarrow \exists\, V$的一组基$\vec{e_1},\cdots,\vec{e_n}$，s.t

$$\mathcal{A}(\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n)=(\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n)\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{pmatrix}$$ (也同样成立) 引理 9.15

Remark. 一维 $\mathcal{A}$-子空间是 $\mathcal{A}$-不可分的，从而是 $\mathcal{A}$-循环 不可分子空间 判定依据

不可分解 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$，$U$ 是 $\mathcal{A}$-子空间，如果 U 不能写成两个非零的 $\mathcal{A}$-子空间的直和，则称 U 是 $\mathcal{A}$-不可分的

回顾 完全正交幂等组

$\pi_1,\dots,\pi_k\in \mathrm{Hom}(V,V)$，如果

(i)（正交性）$\forall i,j\in\{1,2,\dots,k\}$，且 $i\neq j$，$\pi_i\cdot\pi_j=0$

(ii)（幂等性）对 $\forall i\in\{1,2,\dots,k\}$，有 $\boxed{\pi_i^2=\pi_i}$

(iii)（完全性）$\pi_1+\dots+\pi_k$ 是恒等映射，

则称 $\pi_1,\dots,\pi_k$ 是一个完全正交幂等组.

$\pi_i^m=\pi_i$，$\forall n\in\mathbb{N}_+$

$\pi_i^3=\pi_i^2\cdot\pi_i=\pi_i^2$
$=\pi_i$
$\dots$

命题1. 若 $V=U_1\oplus\cdots\oplus U_k$，设 $\pi_i: V\longrightarrow U_i$，$x\longmapsto x_i$.

则 $\pi_1,\dots,\pi_k$ 是一个完全正交幂等组.

注：$\forall x\in V$，$\exists!\, x_i\in U_i$，s.t. $x=x_1+x_2+\dots+x_k$.

命题2. 若 $\pi_1,\dots,\pi_k$ 是一个完全正交幂等组，则

$$V=\mathrm{im}(\pi_1)\oplus\cdots\oplus\mathrm{im}(\pi_k)$$

且 π_i 是关于上述直和的第 i 个投影，$i=1,2,\dots,k$.

$$\pi_i: V\longrightarrow \mathrm{im}(\pi_i),\quad x\longmapsto x_i$$

（谱分解定理）设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$ 可对角化，则

(i) 存在唯一的 $\lambda_1,\dots,\lambda_k\in F$，两两不同和完全正交幂等组 $\pi_1,\dots,\pi_k$，满足

$$\boxed{\mathcal{A}=\lambda_1\pi_1+\dots+\lambda_k\pi_k.}$$

(ii) 存在 $f_1,\dots,f_k\in F[t]$ 满足 $f_i(\lambda_j)=\delta_{ij}$，$\pi_i=f_i(\mathcal{A})$，$i,j\in\{1,2,\dots,k\}$.

Pf: (i) $\mathcal{A}$ 可对角化 $\Rightarrow$ $V=V^{\lambda_1}\oplus\cdots\oplus V^{\lambda_k}$，其中

存在性. $\lambda_1,\dots,\lambda_k$ 是 $\mathcal{A}$ 的互不相同的全部特征值.

设 $\pi_i: V \to V^{\lambda_i}$, $\vec{x} \mapsto \vec{x_i}$, $i=1,2,\dots,k$.

则由命题① $\pi_1,\dots,\pi_k$ 是完全正交幂等组.

对 $\forall \vec{x}\in V$, $\exists\, \vec{x_1}\in V^{\lambda_1},\dots,\vec{x_k}\in V^{\lambda_k}$, s.t.

$$\vec{x} = \vec{x_1}+\dots+\vec{x_k}$$

$$\Rightarrow \mathcal{A}\vec{x} = \mathcal{A}\vec{x_1}+\dots+\mathcal{A}\vec{x_k} = \lambda_1\vec{x_1}+\dots+\lambda_k\vec{x_k}$$
$$= \lambda_1\pi_1(\vec{x})+\dots+\lambda_k\pi_k(\vec{x})$$
$$= (\lambda_1\pi_1+\dots+\lambda_k\pi_k)\vec{x}$$

由 $\vec{x}$ 的任意性可知, $\mathcal{A} = \lambda_1\pi_1+\dots+\lambda_k\pi_k$.

唯一性. 再设 $\sigma_1,\dots,\sigma_m$ 是一个完全正交幂等组 满足 $\mathcal{A} = \alpha_1\sigma_1+\dots+\alpha_m\sigma_m$,
其中 $\alpha_1,\dots,\alpha_m\in F$, 两两不同.

下证 $k=m$, $\sigma_i=\pi_i$, $\alpha_i=\lambda_i$

由命题2可知, $V=\mathrm{im}(\sigma_1)\oplus\dots\oplus\mathrm{im}(\sigma_m)$.

且 σ_i 是关于此直和到第 i 个投影, $i=1,2,\dots,m$.

$\forall\, \vec{x_1}\in \mathrm{im}(\sigma_1)\setminus\{0\}$, 则 $\exists\, \vec{y_1}\in V$, s.t. $\vec{x_1}=\sigma_1(\vec{y_1})$.

$$\mathcal{A}\vec{x_1} = (\alpha_1\sigma_1+\alpha_2\sigma_2+\dots+\alpha_m\sigma_m)(\sigma_1(\vec{y_1}))$$
$$=\alpha_1\sigma_1^2(\vec{y_1})+\alpha_2\sigma_2\sigma_1(\vec{y_1})+\dots+\alpha_m\sigma_m\cdot\sigma_1(\vec{y_1})$$
$$=\alpha_1\sigma_1(\vec{y_1}) \qquad (\text{幂等性和正交性})$$
$$=\alpha_1\vec{x_1}$$

$\Rightarrow$ α_1 是 $\mathcal{A}$ 的特征值且 $\vec{x_1}\in V^{\alpha_1}$.

由 $\lambda_1,\dots,\lambda_k$ 是 $\mathcal{A}$ 的全部特征值, 不妨设 $\alpha_1=\lambda_1$

$\Rightarrow \mathrm{im}(\sigma_1)\subset V^{\lambda_1}$

类似地, 调整下标可证 $\boxed{\alpha_i=\lambda_i}$, $\boxed{\mathrm{im}(\sigma_i)\subset V^{\lambda_i}}$ $i=2,\dots,m$

α_i两两不同 $\Rightarrow m \le k$.

$V = V^{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V^{\lambda_m} \oplus \cdots \oplus V^{\lambda_k}$

$V = \operatorname{im}(\sigma_1) \oplus \cdots \oplus \operatorname{im}(\sigma_m)$

$\Rightarrow m = k$.

由维数关系，$\dim(V) = \dim(V^{\lambda_1}) + \cdots + \dim(V^{\lambda_k})$

$\dim(V) = \dim(\operatorname{im}(\sigma_1)) + \cdots + \dim(\operatorname{im}(\sigma_m))$

$\Rightarrow \dim(V^{\lambda_i}) = \dim(\operatorname{im}(\sigma_i)) \quad i = 1, 2, \cdots, m$

$\Rightarrow \boxed{V^{\lambda_i} = \operatorname{im}(\sigma_i)}$

$\pi_i : V \to V^{\lambda_i}$

$\sigma_i : V \to \operatorname{im}(\sigma_i)$

直和元素唯一性 $\Rightarrow \boxed{\pi_i = \sigma_i}$

$\Rightarrow k = m, \quad \sigma_i = \pi_i, \quad \lambda_i = \alpha_i, \quad i = 1, 2, \cdots, k.$

(iii) 存在 $f_1, \cdots, f_k \in F[t]$ 满足 $f_i(\lambda_j) = \delta_{ij}$, $\pi_i = f_i(A)$, $i, j \in \{1, 2, \cdots, k\}$.

$\forall i = 1, 2, \cdots, k$, 设

$$f_i(t) = \frac{(t-\lambda_1)\cdots(t-\lambda_{i-1})(t-\lambda_{i+1})\cdots(t-\lambda_k)}{(\lambda_i-\lambda_1)\cdots(\lambda_i-\lambda_{i-1})(\lambda_i-\lambda_{i+1})\cdots(\lambda_i-\lambda_k)} \in F[t].$$

则 $f_i(\lambda_j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0 & i \ne j \end{cases}$

$\Rightarrow f_i(\lambda_j) = \delta_{ij}, \quad i, j \in \{1, 2, \cdots, k\}$

设 $g(t) = g_d t^d + \cdots + g_1 t + g_0 \in F[t]$.

$$g(A) = \sum_{i=0}^{d} g_i A^i$$
$$= \sum_{i=0}^{d} g_i (\lambda_1 \Pi_1 + \cdots + \lambda_k \Pi_k)^i$$

$$(\lambda_1 \Pi_1 + \cdots + \lambda_k \Pi_k)(\lambda_1 \Pi_1 + \cdots + \lambda_k \Pi_k)$$
$$= \lambda_1^2 \Pi_1^2 + \cdots + \lambda_k^2 \Pi_k^2. \qquad \Pi_i \Pi_j = 0 \ (i \neq j).$$
$$= \lambda_1^2 \Pi_1 + \cdots + \lambda_k^2 \Pi_k. \qquad \Pi_i^n = \Pi_i$$

$$\Rightarrow \boxed{(\lambda_1 \Pi_1 + \cdots + \lambda_k \Pi_k)^i = \lambda_1^i \Pi_1 + \cdots + \lambda_k^i \Pi_k.}$$

$$\Rightarrow g(A) = \sum_{i=0}^{d} g_i (\lambda_1^i \Pi_1 + \cdots + \lambda_k^i \Pi_k)$$
$$= \left(\sum_{i=0}^{d} g_i \lambda_1^i\right) \Pi_1 + \cdots + \left(\sum_{i=0}^{d} g_i \lambda_k^i\right) \Pi_k$$
$$= g(\lambda_1) \Pi_1 + \cdots + g(\lambda_k) \Pi_k.$$

$$f_i(A) = \sum_{j=1}^{k} f_i(\lambda_j) \Pi_j = f_i(\lambda_i) \Pi_i = \Pi_i$$