1、 $\mathscr{A}\in L(V)$， U_1, U_2 $\mathscr{A}$-不变子空间.

证：U_1+U_2 与 $U_1\cap U_2$ 均为 $\mathscr{A}$-子空间.

Recall：$W\subset V$ 是 $\mathscr{A}$不变子空间 $\Leftrightarrow$ $\mathscr{A}(W)\subset W$

$\Leftrightarrow$ $\forall\, w\in W$，$\mathscr{A}(w)\in W$.

① $U_1+U_2\subset V$， $\forall$ $u_1+u_2\in U_1+U_2$

要证：$\mathscr{A}(u_1+u_2)\in U_1+U_2$

$\mathscr{A}(u_1+u_2)=\mathscr{A}(u_1)+\mathscr{A}(u_2)$. $u_1\in U_1$，$u_2\in U_2$

U_1, U_2 为 $\mathscr{A}$不变子空间 $\Rightarrow$ $\mathscr{A}(u_1)\in U_1$，$\mathscr{A}(u_2)\in U_2$

$\Rightarrow$ $\mathscr{A}(u_1+u_2)\in U_1+U_2$.

② $u\in U_1\cap U_2$，$u\in U_1$，$u\in U_2$，$\mathscr{A}(u)\in U_1$，$\mathscr{A}(u)\in U_2$

$\Rightarrow \mathscr{A}(u)\in U_1\cap U_2$

$\Rightarrow$ $U_1\cap U_2$ $\mathscr{A}$ 不变子空间.

2. $\mathscr{A}\in L(V)$. $\ker(\mathscr{A})\oplus \operatorname{im}\mathscr{A}=V$. 证明：存在 V 的一组基 s.t. $\mathscr{A}$ 在这组基下矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} B & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

$B\in M_r(F)$，$\operatorname{rank}\mathscr{A}=\operatorname{rank}B=r$.

证：$\ker\mathscr{A}\oplus\operatorname{im}\mathscr{A}=V$，取 $\operatorname{im}V$ 的基为 $e_1,\cdots,e_r$，再取 $\ker V$ 的基为 $e_{r+1},\cdots,e_n$.

$\Downarrow$

$e_1,\cdots,e_r,e_{r+1},\cdots,e_n$ 为 V 的一组基，$\ker\mathscr{A}$，$\operatorname{im}\mathscr{A}$ 均是 $\mathscr{A}$的不变子空间

在基 $e_1,\cdots,e_r,e_{r+1},\cdots,e_n$ 下，$\mathscr{A}$的矩阵为

$$\mathscr{A}(e_1,\cdots,e_r,e_{r+1},\cdots,e_n)=(e_1,\cdots,e_r,e_{r+1},\cdots,e_n)\cdot\begin{pmatrix}B&0\\0&C\end{pmatrix}$$

其中 $\mathscr{A}(e_1,\cdots,e_r)=(e_1,\cdots,e_r)\cdot B$

$\mathscr{A}(e_{r+1},\cdots,e_n)=(e_{r+1},\cdots,e_n)\cdot C$ $\qquad \mathscr{A}|_{\ker\mathscr{A}}=0$

$\Rightarrow C=0.$

$\Rightarrow \mathscr{A}$ 在基 $e_1,\cdots,e_n$ 下矩阵为 $\begin{pmatrix}B&0\\0&0\end{pmatrix}$ $\qquad B\in M_{r\times r}(F)$

$$r=\dim(\operatorname{im}\mathscr{A})=\operatorname{rank}(\mathscr{A})=\operatorname{rank}\begin{pmatrix}B&0\\0&0\end{pmatrix}=\operatorname{rank}(B)$$

$\Rightarrow B$ 是满秩方阵. $\qquad$ Ⅱ

错误：取 $\operatorname{im}\mathscr{A}$ 一组基 $e_1,\cdots,e_r$，扩充为 V 的一组基 $e_1,\cdots,e_r,e_{r+1},\cdots,e_n$

断言：由于 $\ker\mathscr{A}\oplus\operatorname{im}\mathscr{A}=V$，$e_{r+1},\cdots,e_n$ 为 $\ker\mathscr{A}$ 的基.

eg：取 $e_1,\cdots,e_r$ 为 $\operatorname{im}\mathscr{A}$ 的基，取 $w_{r+1},\cdots,w_n$ 为 $\ker\mathscr{A}$ 的基.

$e_{r+1}=w_{r+1}+e_1,\ \cdots,\ e_n=w_n+e_1$

则 $e_1,\cdots,e_n$ 为 V 的基，但 $e_{r+1},\cdots,e_n$ 不是 $\ker\mathscr{A}$ 的基.

3. $\quad A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}\in M_3(\mathbb{R})$

特征多项式：$\chi_A(\lambda)=\det(\lambda E-A)=\begin{vmatrix}\lambda-2&-1&-1\\-1&\lambda-2&-1\\-1&-1&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2\cdot(\lambda-4).$

特征值：$\chi_A(\lambda)=0 \Rightarrow \lambda_1=1,\ \lambda_2=4$ 为 A 的特征值.

特征向量：　$\lambda_1=1$　　$(\lambda_1 E-A)\cdot X=0$，　$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}-1&-1&-1\\-1&-1&-1\\-1&-1&-1\end{pmatrix}X=0 \Rightarrow \begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0.$$

$v_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$　　$v_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$　　v_1, v_2 为 $\underbrace{V^{\lambda_1}}_{\lambda_1\text{对应的特征向量构成的子空间}}$ 的一组基

λ_1对应的特征向量构成的子空间.

$\lambda_2=4$，　$(\lambda_2 E-A)\cdot X=0$,

$$\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}X=0 \Rightarrow \begin{pmatrix}2&-1&-1\\0&\frac{3}{2}&-\frac{3}{2}\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0$$

取 $v_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，　v_3 为 V^{λ_2} 的一组基.

实特征为 $\lambda_1=1$，对应特征向量为 av_1+bv_2，$(a,b)\neq(0,0)$

$\lambda_2=4$，对应的特征向量为 cv_3，$c\neq 0$. □.

Rem：此题中的矩阵A可相似对角化.

4.

$$A=\begin{pmatrix}\alpha_1&0&\cdots&0\\0&\alpha_2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&\alpha_n\end{pmatrix}\in M_n(\mathbb{C})$$

(i) 计算 μ_A 与 f_A.

(ii) 什么时候 $\deg(\mu_A)<\deg(f_A)$.

Recall: $M=\begin{pmatrix}M_1&0&\cdots&0\\0&M_2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&M_k\end{pmatrix}$　$M_i\in M_{n_i}(\mathbb{C})$，　$\mu_M=\mathrm{lcm}(\mu_{M_1},\cdots,\mu_{M_k})$.

$$A=\begin{pmatrix}\alpha_1 & & & \\ & \alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \alpha_n\end{pmatrix} \Rightarrow \mu_A = \operatorname{lcm}(\mu_{\alpha_1\cdot E_1}, \cdots, \mu_{\alpha_n\cdot E_1})$$ E_1为1×1阶单位阵.

$$= \operatorname{lcm}(t-\alpha_1, \cdots, t-\alpha_n)$$

$$= \prod_{k=1}^{s}(t-\alpha_{i_k})$$

其中$\{\alpha_{i_1}, \cdots, \alpha_{i_s}\}$为$\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$中元素，

重复的元素取1次.

$$\chi_A = \det(tE-A) = \det\begin{pmatrix} t-\alpha_1 & 0 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & t-\alpha_n\end{pmatrix} = (t-\alpha_1)\cdot\cdots\cdot(t-\alpha_n)$$

由(i)可知：若 $\exists\ \alpha_i = \alpha_j$, $i\neq j$，则 $\deg(\mu_A) < \deg(\chi_A)$. □

5. $\mathscr{A}\in L(V)$, $\mathscr{A}^5-\mathscr{A}^3=3\mathscr{A}$. $\operatorname{char}(F)\neq 3$, 求证：$\ker\mathscr{A}\oplus\operatorname{im}\mathscr{A}=V$.

$$\ker\mathscr{A}\oplus\operatorname{im}\mathscr{A}=V \Longleftrightarrow \ker(\mathscr{A})=\ker(\mathscr{A}^2) \Leftrightarrow \operatorname{rk}(\mathscr{A})=\operatorname{rk}(\mathscr{A}^2)$$

$\uparrow$ 核像分解.

$$\Leftrightarrow \operatorname{im}(\mathscr{A})=\operatorname{im}(\mathscr{A}^2)$$

$$\Leftrightarrow t^2 \nmid \mu_A$$

证明： $\operatorname{char}F\neq3$, $3\neq0$. $\pm1\neq0$.

① $\operatorname{rk}(\mathscr{A})=\operatorname{rk}(\mathscr{A}^2)$.

$\mathscr{A}^5-\mathscr{A}^3=3\mathscr{A}$ i.e. $\mathscr{A}^2(\mathscr{A}^3-\mathscr{A})=3\mathscr{A}$.

$$\operatorname{rk}(\mathscr{A})=\operatorname{rk}(3\mathscr{A})=\operatorname{rk}(\mathscr{A}^2(\mathscr{A}^3-\mathscr{A}))\leq\operatorname{rk}(\mathscr{A}^2)\leq\operatorname{rk}(\mathscr{A})$$

$$\Rightarrow \operatorname{rk}(\mathscr{A})=\operatorname{rk}(\mathscr{A}^2)$$

由核像分解，命题得证.

② $\ker(\mathscr{A})$, $\ker(\mathscr{A}^2)$, $\ker(\mathscr{A})\subset\ker\mathscr{A}^2$，只需证 $\ker\mathscr{A}^2\subset\ker\mathscr{A}$.

$\forall\ y\in\ker\mathscr{A}^2$, $3\mathscr{A}y=(\mathscr{A}^5-\mathscr{A}^3)(y)=(\mathscr{A}^3-\mathscr{A})(\mathscr{A}^2(y))=(\mathscr{A}^3-\mathscr{A})=0$

i.e. $\mathscr{A}y=0 \Rightarrow \ker\mathscr{A}^2\subset\ker\mathscr{A}$. □

③ 设 $t^2 \nmid \mu_A$. 令 $f(t) = t^5 - t^3 - 3t$. $f(\mathcal{A}) = 0$.

$\mathrm{Char}\,F \neq 3$, $\Rightarrow t^2 \nmid f(t)$.

$\Downarrow$

$\mu_A \mid f(t)$.

$\Rightarrow t^2 \nmid \mu_A$.

如若不然，$t^2 \mid \mu_A$，$\mu_A \mid f(t)$，$\Rightarrow t^2 \mid f(t)$，矛盾. ∎

有问题的解法：① $\ker \mathcal{A} + \operatorname{im} \mathcal{A}$ 是直和 $\Rightarrow$ ② $\ker \mathcal{A} \oplus \operatorname{im} \mathcal{A} = V$.

事先并不知道 $V = \ker \mathcal{A} + \operatorname{im} \mathcal{A}$.

$\dim V = \dim \ker \mathcal{A} + \dim \operatorname{im} \mathcal{A}$.

$\dim V = \dim(\ker \mathcal{A} + \operatorname{im} \mathcal{A})$ $\quad \ker \mathcal{A} + \operatorname{im} \mathcal{A} \subset V$

$\Rightarrow \ker \mathcal{A} + \operatorname{im} \mathcal{A} = V$.

6. $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$，$\mathcal{A}$ 可逆 ① $\mathcal{A}$ 不变子空间也是 $\mathcal{A}^{-1}$ 的不变子空间.

② $\mathcal{A}$ 的特征向量也是 $\mathcal{A}^{-1}$ 的特征向量.

① $W \subset V$ 为 $\mathcal{A}$-子空间. W 为 $\mathcal{A}^{-1}$-子空间.

$\forall w \in W$, $\mathcal{A}^{-1}(w) \in W$.

$\mathcal{A}|_W : W \longrightarrow W$ $\quad$ $\mathcal{A}$ 可逆, $\Rightarrow$ $\mathcal{A}$ 为线性单射.

$\mathcal{A}|_W$ 也为单射. $\mathcal{A}|_W$ 是有限维空间到有限维空间的线性单射.

$\Rightarrow \mathcal{A}|_W$ 是双射. $\Rightarrow \forall w \in W$, $\exists\, w_0 \in W$ s.t. $\mathcal{A}|_W(w_0) = w$

$\mathcal{A}|_W(w_0) = \mathcal{A}(w_0) = w$. $\Rightarrow \mathcal{A}^{-1}(w) = w_0 \in W$.

i.e. $\forall w \in W$, $\exists\, w_0 \in W$ s.t. $\mathcal{A}^{-1}(w) = w_0$. 即 W 为 $\mathcal{A}^{-1}$ 子空间.

③ 设 v 为 $\mathcal{A}$ 的特征向量. $\mathcal{A}(v)=\lambda v$. $\lambda\in F$. $\mathcal{A}$ 可逆 $\Rightarrow \lambda\neq 0$.

$$\mathcal{A}v=\lambda\cdot v \Rightarrow v=\mathcal{A}^{-1}(\lambda v) \Rightarrow \mathcal{A}^{-1}v=\lambda^{-1}\cdot v.$$

$\Rightarrow v$ 为 $\mathcal{A}^{-1}$ 的特征向量. $\square$

Rem: 若 λ 为 $\mathcal{A}$ 的特征值, 则 λ^{-1} 为 $\mathcal{A}^{-1}$ 特征值.

算子和向量的极小多项式.

设 $\mathcal{A}\in L(V)$, $v\in V$, $f(t)\in F[t]$.

Def: 称 $f(t)$ 通过 $\mathcal{A}$ 零化 v 如果 $f(\mathcal{A})(v)=0$.

Def: 非零, 次数最小的首一的通过 $\mathcal{A}$ 零化 v 的多项式称为通过 $\mathcal{A}$ 零化 v 的极小多项式, 记为 $\mu_{\mathcal{A},v}$.

Rem: 由多项式的带余除法, 极小多项式一定存在.

命题: $\mathcal{A}\in L(V)$, 则存在 $v\in V$, s.t. $\mu_{\mathcal{A},v}=\mu_{\mathcal{A}}$.

引理1. $\mathcal{A}\in L(V)$, $\mu_{\mathcal{A}}=p^k$, $p\in F[t]$, p 不可约, 首一, 则 $\exists v\in V$ s.t.

$$\mu_{\mathcal{A},v}=\mu_{\mathcal{A}}.$$

Pf: $\mu_{\mathcal{A}}(\mathcal{A})=0$. p 不可约. $\mu_{\mathcal{A}}(\mathcal{A})\cdot(v)=0$.

$\forall v\in V$ $\quad \mu_{\mathcal{A},v}\mid\mu_{\mathcal{A}}$ $\quad \mu_{\mathcal{A}}=p^k$ $\longrightarrow$ $\mu_{\mathcal{A},v}=p^{m_v}$

如果不存在 v s.t. $\mu_{\mathcal{A},v}=\mu_{\mathcal{A}}$.

$1\leq m_v\leq k-1$

$\forall v\in V$, $\quad p^{k-1}=q_v\cdot\mu_{\mathcal{A},v}$.

$$p^{k-1}(\mathcal{A}) = q_v(\mathcal{A})\cdot \mu_{\mathcal{A},v}(\mathcal{A})$$

$$\left(p^{k-1}(\mathcal{A})\right)(v) = \left(q_v(\mathcal{A})\right)\left(\underbrace{\left(\mu_{\mathcal{A},v}(\mathcal{A})\right)(v)}_{=0}\right) = 0.$$

$\Rightarrow \forall v\in V\quad p^{k-1}(\mathcal{A})v=0. \quad\Rightarrow\quad p^{k-1}(\mathcal{A})=0.$ 与 $\mu_\mathcal{A}=p^k$ 矛盾. □

Recall:(扩展的核核分解)(定理8.21)

设 $\mu_\mathcal{A}=q_1\cdot\cdots\cdot q_s$. q_i, q_j 两两互素, $\mu_\mathcal{A}(\mathcal{A})=0$.

记 $K_i=\ker(q_i(\mathcal{A}))$ 则

$$V=K_1\oplus\cdots\oplus K_s.$$

且 K_i 为 $\mathcal{A}$-子空间. $\mathcal{A}_i:=\mathcal{A}|_{K_i}: K_i\longrightarrow K_i$

$$\mu_{\mathcal{A}_i}=q_i.$$

命题: $\mathcal{A}\in L(V)$, 则存在 $v\in V$, s.t. $\mu_{\mathcal{A},v}=\mu_\mathcal{A}$.

证: 设 $\mu_\mathcal{A}=q_1^{m_1}\cdot\cdots\cdot q_s^{m_s}$ $\quad q_i$ 为不可约多项式.

取 $K_i=\ker\left(q_i^{m_i}(\mathcal{A})\right)$, 则 $V=K_1\oplus\cdots\oplus K_s$.

K_i 均为 $\mathcal{A}$ 的不变子空间.

$\mathcal{A}_i:=\mathcal{A}|_{K_i}, \quad \mu_{\mathcal{A}_i}=q_i^{m_i}$

由引理1, 对 $\forall\, 1\le i\le s$, $\exists\, v_i\in K_i$, s.t. $\mu_{\mathcal{A}_i}=\mu_{\mathcal{A}_i,v_i}$

取 $v=v_1+\cdots+v_s$.

$$0=\mu_{\mathcal{A},v}(\mathcal{A})(v)=\underbrace{\mu_{\mathcal{A},v}(\mathcal{A})(v_1)}_{K_1}+\cdots+\underbrace{\mu_{\mathcal{A},v}(\mathcal{A})(v_s)}_{K_s}$$

$v_i\in K_i \quad\Rightarrow$

$K_1,\dots,K_s$ 为直和 $\quad\Rightarrow\quad \mu_{\mathcal{A},v}(\mathcal{A})(v_i)=0.$

$\mu_{\mathcal{A}_i,v_i}\mid\mu_{\mathcal{A},v}\quad \forall i$ 成立.

$$\Rightarrow \operatorname{lcm}(\mu_{A_1,v_1}, \ldots, \mu_{A_s,v_s}) \mid \mu_{A,v}$$

$$\Rightarrow \underbrace{p_1^{n_1} \cdot \cdots \cdot p_s^{n_s}}_{\mu_A} \mid \mu_{A,v}$$

即 $\mu_A \mid \mu_{A,v}$. 但 $\mu_{A,v} \mid \mu_A$.

$$\Rightarrow \mu_A = \mu_{A,v}. \quad \square$$