1. 证 U_1+U_2 是子空间

$0\in U_1+U_2$, U_1+U_2 非空,

$\forall \alpha,\beta\in F$, $\vec{x},\vec{y}\in U_1+U_2$, $\alpha\vec{x}+\beta\vec{y}\in U_1+U_2$.

$\Rightarrow$ U_1+U_2 是子空间

$\forall \vec{x}\in U_1+U_2$.

$\exists x_1\in U_1$, $x_2\in U_2$, s.t. $\vec{x}=\vec{x_1}+\vec{x_2}$

由于 U_1,U_2 是 A 一子空间, 故 $A\vec{x_1}\in U_1$, $A\vec{x_2}\in U_2$.

$\Rightarrow A\vec{x}=A\vec{x_1}+A\vec{x_2}\in U_1+U_2$.

$\Rightarrow$ U_1+U_2 是 A 一子空间.

$\forall \vec{x}\in U_1\cap U_2$, $A\vec{x}\in U_1$, $A\vec{x}\in U_2$, (U_1,U_2 是 A-子空间)

$\Rightarrow A\vec{x}\in U_1\cap U_2$.

$\Rightarrow$ $U_1\cap U_2$ 是 A 一子空间.

2. 解: 设 $\vec{e_1},\dots,\vec{e_r}$ 是 $\mathrm{im}(A)$ 的一组基, $\vec{e_{r+1}},\dots,\vec{e_n}$ 是 $\ker(A)$ 的一组基.
其中 $n=\dim V$

$\ker(A)\oplus \mathrm{im}(A)=V$, $\Rightarrow \vec{e_1},\dots,\vec{e_r},\vec{e_{r+1}},\dots,\vec{e_n}$ 是 V 的一组基.

$\forall j\in\{1,\dots,d\}$, $A\vec{e_j}\in \mathrm{im}(A)$, 从而 $A(\vec{e_j})=\sum_{i=1}^{r}\alpha_{ij}e_i$, $\alpha_{ij}\in F$.

$\forall j\in\{d+1,\dots,n\}$, $A\vec{e_j}=\vec{0}$.

$$\Rightarrow A(\vec{e_1},\dots,\vec{e_n})=(\vec{e_1},\dots,\vec{e_n})\begin{pmatrix}\overbrace{\begin{matrix}\alpha_{1,1} & \cdots & \alpha_{r,1}\\ \vdots & & \vdots\\ \alpha_{r,1} & \cdots & \alpha_{r,r}\end{matrix}}^{B} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

$\mathrm{rank}(B)=\dim(\mathrm{im}(A))=\mathrm{rank}(A)=r$.

3. 1. 计算特征多项式

$$\chi_A=|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & -1 & -1\\ -1 & \lambda-2 & -1\\ -1 & -1 & \lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-4)$$

$\chi_A=0\Rightarrow \lambda_1=1$, $\lambda_2=4$.

② λ_i 代入到 $(\lambda_i E-A)X=\vec{0}$ 中，求解解空间.

$\lambda_1=1$, $\lambda_1 E-A=\begin{pmatrix}-1&-1&-1\\-1&-1&-1\\-1&-1&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1&-1&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}\cancel{*}\\1\\0\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}*\\0\\1\end{pmatrix}$

$\Rightarrow(\lambda_1E-A)X=0$ 的解空间为 $\left\langle\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\rangle$

$\Rightarrow \underline{V^{\lambda_1}=\{c_1\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\mid c_1,c_2\in\mathbb{R}\}}$

$\lambda_2=4$, $4E-A=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-2\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$.

$(4E-A)X=0$ 的解空间为 $\left\langle\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\rangle$, $\underline{V^{\lambda_2}=\{c\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\mid c\in\mathbb{R}}$

$\Rightarrow$ $\underline{A\text{的所有实特征根为 }1\text{ 和 }4\text{，实特征向量为 }V^{\lambda_1}\cup V^{\lambda_2}\text{ 中的}}$.

4. $A=\begin{pmatrix}\boxed{\alpha_1}&&&\\&\boxed{\alpha_2}&&\\&&\ddots&\\&&&\boxed{\alpha_n}\end{pmatrix}$

(i) $\chi_A=|tE-A|=(t-\alpha_1)(t-\alpha_2)\cdots(t-\alpha_n)$

$\mu_A=\mathrm{lcm}(t-\alpha_1,t-\alpha_2,\cdots,t-\alpha_n)$

设 $\lambda_1,\cdots,\lambda_s$ 是 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 中所有不同的数，

$\mu_A=(t-\lambda_1)\cdots(t-\lambda_k)$

(ii) 当 $\exists i\neq j$, $\alpha_i=\alpha_j$ 时，$\deg(\mu_A)<\deg(\chi_A)$

5. $\underline{\ker(A)\oplus\mathrm{im}(A)=V\iff\mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}(A^2)}$.

$\iff t^2\nmid\mu_A$

$f(t)=t(t^4-t^2-3)$

$t\mid f(t)$

$t^2\nmid f(t)$

$t\nmid t^4-t^2-3$

$0-3=0$

$-3\neq0$

设 $f(t)=t^5-t^3-3t\in F[t]$, 则 $f(A)=\mathcal{O}$.

由 $\mathrm{char}(F)\neq3$, $1,-1,-3\neq0$

$\Rightarrow$ t 在 $f(t)$ 中的重数等于 1

$\mu_A(t)\mid f(t)$ $\Rightarrow$ t 在 $\mu_A(t)$ 中的重数不大于 1,

$\Rightarrow t^2\nmid\mu_A(t)$

由核像分解可知，$\ker(A)\oplus \mathrm{Im}(A)=V$.

---

6. Pf: 设 U 是 A 的不变子空间，则 $A|_U \in L(U)$

A 可逆 $\Leftrightarrow$ $\ker(A)=\{0\}$.

$\Rightarrow \ker(A|_U)=\{0\}$ $\Rightarrow$ $A|_U$ 可逆

$\forall \vec{u}\in U$, $\exists \vec{v}\in U$, s.t $A(\vec{v})=A|_U(\vec{v})=\vec{u}$

$U\ni \vec{v}=A^{-1}A(\vec{v})=A^{-1}(\vec{u})$

$\Rightarrow$ $A^{-1}(\vec{u})\in U$

$\Rightarrow$ U 是 A^{-1} 的不变子空间.

设 $\vec{x}$ 是 A 的特征向量，则 $\exists \lambda \in F\setminus\{0\}$, s.t $A\vec{x}=\lambda\vec{x}$

($\lambda=0$, A 可逆 $\Leftrightarrow$ $\chi_A(0)\neq 0$ 与 A 可逆相矛盾).

$A\vec{x}=\lambda\vec{x}$. , $\vec{x}=A^{-1}A\vec{x}=A^{-1}(\lambda\vec{x})=\lambda A^{-1}\vec{x}$

$\Rightarrow A^{-1}\vec{x}=\frac{1}{\lambda}\vec{x}$

$\Rightarrow$ A 的特征向量也是 A^{-1} 的特征向量.

(扩展的核核分解) 设 $A\in L(V)$. $f(t)\in F[t]\setminus\{0\}$. 且 $f(A)=O$. 设 $f=q_1\cdots q_s$ 其中 $q_1,\cdots,q_s\in F[t]$ 两两互素，对 $\forall i\in\{1,2,\cdots,s\}$, 令 $K_i=\ker(q_i(A))$

$$V=K_1\oplus\cdots\oplus K_s.$$

定义 设 $A\in L(V)$ 和 $\vec{v}\in V$, 设 $f(t)\in F[t]$. 如果 $f(A)(\vec{v})=\vec{0}$ 则称 f 是关于 A 和 $\vec{v}$ 的零化多项式. 这些多项式中次数最小的非零多项式(首一)称为关于 A 和 $\vec{v}$ 的极小多项式，简记为 $\mu_{A,\vec{v}}$.

性质 $f(t)$ 关于 A 零化 $\vec{v}$ $\Leftrightarrow$ $\mu_{A,\vec{v}}(t)\mid f(t)$. , 特别地，$\mu_{A,\vec{v}}\mid\mu_A$

定理 设 $A\in L(V)$. 则存在 $\vec{v}\in V$, 使得 $\mu_{A,\vec{v}}=\mu_A$

引理1. 设 $A\in L(V)$ 且 $\mu_A=p^k$, 其中 $p\in F[t]$ 不可约和首一，则存在 $\vec{v}\in V$, 使得 $\mu_{A,\vec{v}}=\mu_A$.

Pf: 由于 $\mu_{A,\vec{v}}\mid\mu_A$ 且 p 不可约，则 $\mu_{A,\vec{v}}=p^{m_{\vec{v}}}$, 其中 $1\le m_{\vec{v}}\le k$.

假设不存在 $\vec{v}$，使得 $m_{\vec{v}}=k$.

$\Rightarrow \forall \vec{v}\in V$，$m_{\vec{v}}\le k-1$. 故 $p^{k-1}=q_{\vec{v}}\cdot\mu_{A,\vec{v}}$，$q_{\vec{v}}\in F[t]$.

$\Rightarrow p^{k-1}(A)=q_v(A)\,\mu_{A,\vec{v}}(A)$

$\Rightarrow p^{k-1}(A)(\vec{v})=q_v(A)(\mu_{A,\vec{v}}(A)(\vec{v}))=q_A(A)(\vec{0})=\vec{0}$

$\Rightarrow p^{k-1}(A)=\mathcal{O}$

$\Rightarrow \mu_A \mid p^{k-1}$ $\rightarrow\Leftarrow$

$\Rightarrow \exists\, \vec{v}\in V$, s.t. $\mu_{A,\vec{v}}=\mu_A$.

引理2. 若 $\mu_A=p_1^{m_1}p_2^{m_2}\cdots p_s^{m_s}$，令 $K_i=\ker(p_i^{m_i}(A))$ 且 $A_i=A|_{K_i}$，

则 $V=K_1\oplus\cdots\oplus K_s$，且 $\mu_{A_i}=p_i^{m_i}$，$i=1,2,\cdots,s$

Pf: 直和分解的证明直接代入 $f=p_1^{m_1}p_2^{m_2}\cdots p_s^{m_s}$ 即可得到

$p_i^{m_i}(A_i)=\mathcal{O}\Rightarrow \mu_{A_i}\mid p_i^{m_i}$，$i=1,2,\cdots,s$ ①

$\Rightarrow \mu_{A_1},\mu_{A_2},\cdots,\mu_{A_s}$ 两两互素

$\Rightarrow \underset{p_1^{m_1}p_2^{m_2}\cdots p_s^{m_s}}{\underset{\|}{\mu_A}}=\mathrm{lcm}(\mu_{A_1},\cdots,\mu_{A_s})=\mu_{A_1}\cdots\mu_{A_s}$ ②

(定理5-6,上上周讲义)

由①② $\Rightarrow \mu_{A_i}=p_i^{m_i}$，$i=1,2,\cdots,s$.

定理证明：$A_i\in\mathcal{L}(K_i)$，$\forall i\in\{1,2,\cdots,s\}$. $\mu_A=p_1^{m_1}\cdots p_s^{m_s}$

由引理2. $\mu_{A_i}=p_i^{m_i}$，由引理1可知，$\exists\,\vec{v}_i\in K_i$, s.t. $\mu_{A_i}=\mu_{A_i,\vec{v}_i}$.

令 $\vec{v}=\vec{v}_1+\cdots+\vec{v}_s$，则

$\vec{0}=\mu_{A,\vec{v}}(A)(\vec{v})=\underbrace{\mu_{A,\vec{v}}(A)(\vec{v}_1)}_{K_1}+\cdots+\underbrace{\mu_{A,\vec{v}}(A)(\vec{v}_s)}_{K_s}$

$K_i=\ker(p_i^{m_i}(A))$ 是 A-子空间 $\Rightarrow \mu_{A,\vec{v}}(A)(\vec{v}_i)\in K_i$，$i=1,2,\cdots,s$.

由直和分解性质—0分解唯一

$\Rightarrow \mu_{A,\vec{v}}(A)(\vec{v}_i)=\vec{0}$

$\cdots(\vec{v}_i)=\vec{0}$

$\mu_{A,\vec{v}}(A_i)(\vec{v}_i) = 0$ （ □.）

$\Rightarrow \underbrace{\mu_{A_i,\vec{v}_i}(t)} \mid \underbrace{\mu_{A,\vec{v}}}(t)$

~~游~~见

$\mu_{A_i,\vec{v}_i}(A_i)(\vec{V}_i) = \vec{0}$

$\Rightarrow \mu_{A_i} = \mu_{A_i,\vec{v}_i}$

$\Rightarrow \mu_{A_i} \mid \mu_{A,\vec{v}}(t), \quad i=1,2,\cdots,s)$

$\Rightarrow \mu_A = \mathrm{lcm}(\mu_{A_1}, \cdots, \mu_{A_s}) \mid \mu_{A,\vec{v}}$.

$\mu_{A,\vec{v}} \mid \mu_A \quad \Rightarrow \quad \mu_{A,\vec{v}} = \mu_A$

特征向量和特征多项式

定义 设 $A \in \mathcal{L}(V)$，$\vec{v} \in V \setminus \{\vec{0}\}$，如果 $\langle \vec{v} \rangle$ 是 A-子空间，则称 $\vec{v}$ 是 A 的一个特征向量.

等价刻画：

① $A\vec{v} \in \langle \vec{v} \rangle$.

② $\exists \lambda \in F$, s.t. $A\vec{v} = \lambda \vec{v}$.

特征子空间 $V^{\lambda} = \{\vec{x} \in V \mid A(\vec{x}) = \lambda \vec{x}\}$.

定义 设 $A \in \mathcal{L}(V)$，$\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n$ 是 V 的一组基，A 在此基下的矩阵为 A，则 $\det(tE - A)$ 称为 A 的特征多项式.

注 若 $\vec{\varepsilon}_1, \cdots, \vec{\varepsilon}_n$ 是 V 的另一组基，$(\vec{\varepsilon}_1, \cdots, \vec{\varepsilon}_n) = (\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n)P$，$P \in GL_n(F)$

$B = P^{-1}AP$

$\underline{\det(tE - B)} = \det(tE - P^{-1}AP) = \det(P^{-1}(tE - A)P) = \underline{\det(tE - A)}$

$\mathrm{spec}_F(A) = \{\chi_A(t)$ 在 F 中的所有根$\}$，称为 A 在 F 中的谱

例 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$，计算 A 的所有复特征根和复特征向量

解：① 计算特征多项式 $\chi_A(t) = \begin{vmatrix} t-1 & 0 & -1 \\ 0 & t-1 & 0 \\ 1 & 0 & t-1 \end{vmatrix} = (t-1)(t^2 - 2t + 2)$

$\mathrm{spec}_{\mathbb{C}} A = \{1, 1+\sqrt{-1}, 1-\sqrt{-1}\}$

$V^1 = \{(0, c, 0)^t \mid c \in \mathbb{C}\}$

$V^{1+\sqrt{-1}}=\{c(1,0,\sqrt{-1})^t \mid c\in\mathbb{C}\}$

$V^{1-\sqrt{-1}}=\{c(1,0,-\sqrt{-1})^t \mid c\in\mathbb{C}\}$.

$\Rightarrow A$的特征向量是 $(V^1\cup V^{1+\sqrt{-1}}\cup V^{1-\sqrt{-1}})\setminus\{\vec{0}\}$.

例 设 $A\in L(V)$, $\alpha,\beta\in spec_F(A)$ 且 $\alpha\neq\beta$, 设 $\vec{u}\in V^\alpha$, $\vec{v}\in V^\beta$ 是两个非零向量. 证明: $\vec{u}+\vec{v}$ 不是 A 的特征向量.

Pf: 假设 $\vec{u}+\vec{v}$ 是 A 的特征向量, 则存在 $\lambda\in F$, s.t $A(\vec{u}+\vec{v})=\lambda(\vec{u}+\vec{v})$

另一方面 $A(\vec{u}+\vec{v})=A\vec{u}+A\vec{v}=\underline{\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}}$, $\alpha,\beta\in F$.

$\Rightarrow (\lambda-\alpha)\vec{u}+(\lambda-\beta)\vec{v}=\vec{0}$

由 $\alpha\neq\beta$, 不妨假设 $\lambda-\alpha\neq 0$

$\Rightarrow \vec{u}=\underbrace{\boxed{-\frac{\lambda-\beta}{\lambda-\alpha}}}_{\in F}\vec{v}\in V^\beta$ $\qquad \Rightarrow A\vec{u}=\beta\vec{u}$, $A\vec{u}=\alpha\vec{u}$

$\Rightarrow \vec{u}=\vec{0}$ $(\alpha\neq\beta)$. $\rightarrow\leftarrow$

$\Rightarrow \vec{u}+\vec{v}$ 不是 A的特征向量

法二: 引理: 设 $A\in L(V)$, $\lambda_1,\cdots,\lambda_k\in spec_F(A)$ 两两不同, 则 $V^{\lambda_1}+\cdots+V^{\lambda_k}$ 是直和.

Pf: 设 $\vec{u}+\vec{v}=V^\lambda$, $\exists\lambda\in F$.

① $\lambda=\alpha$. $\Rightarrow \vec{v}\in V^\alpha$, $\vec{v}\in V^\alpha\cap V^\beta=\{\vec{0}\}$ $\rightarrow\leftarrow$.

② $\lambda=\beta$ $\rightarrow\leftarrow$

③ $\lambda\neq\alpha,\beta$, $V^\lambda+V^\beta+V^\alpha$ 是直和. $\Rightarrow V^\lambda\cap(\underline{V^\beta+V^\alpha})=\{\vec{0}\}$

$\vec{u}+\vec{v}\in(V^\alpha+V^\beta)\cap V^\lambda$. $\Rightarrow \vec{u}+\vec{v}=\{\vec{0}\}$.

$\rightarrow\leftarrow$

相似矩阵特征向量关系

$A\sim_s B$, $\lambda\in spec_F(A)$, 则 $\lambda\in spec_F(B)$ 且 $\dim V_A^\lambda=\dim V_B^\lambda$.

Pf: 设 $P\in GL_n(F)$, s.t $B=P^{-1}AP$. 定义

$$\phi: V_A^\lambda \to V_B^\lambda$$
$$\vec{x} \to P^{-1}\vec{x}.$$

由 $B=P^{-1}AP \Rightarrow BP^{-1}=P^{-1}A$, 对 $\forall \vec{x}\in V_A^\lambda$.

$B(P^{-1}\vec{x}) = BP^{-1}\vec{x} = (P^{-1}A)\vec{x} = P^{-1}(A\vec{x}) = P^{-1}(\lambda x) = \lambda P^{-1}x$

良定义: $\Rightarrow P^{-1}\vec{x} \in V_B^\lambda$.

显然 ϕ 是线性映射(矩阵乘法)

类似地, 定义:

$$\psi: V_B^\lambda \to V_A^\lambda.$$
$$\vec{x} \mapsto P\vec{x}.$$

$Bx=\lambda x$

$P^{-1}APx=\lambda x$

$APx=P\lambda x=\lambda(Px)$

良定义+线性映射.

$\forall \vec{x}\in V_A^\lambda$, $\psi\circ\phi(\vec{x}) = \psi(P^{-1}\vec{x}) = PP^{-1}\vec{x} = \vec{x}$

$\Rightarrow \psi\circ\phi = id$

同理, $\phi\circ\psi = id.$

$\Rightarrow$ ϕ 是线性同构

$\Rightarrow$ $\dim(V_B^\lambda) = \dim(V_A^\lambda)$.

相似不变量

矩阵的秩, 迹, 行列式, 极小多项式, 特征多项式.

注: 特征向量不是相似不变量

例. $A=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R})$.

$\chi_A = \begin{vmatrix}t&-1\\-1&t\end{vmatrix} = t^2-1$

$spec_{\mathbb{R}}(A)=\{1,-1\}$.

$\Rightarrow V^1=\langle\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\rangle$, $V^{-1}=\langle\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\rangle$.

设 $P=\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}$. $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&\\&-1\end{pmatrix}$

$$B\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \neq \lambda \overset{\substack{\shortparallel\\ B.}}{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}} \qquad \lambda\in\mathbb{R}.$$

$\Rightarrow$ $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ 不是B的特征向~~量~~量，但是A的特征向量，这里$(A\sim_S B)$