1.(i) 解: $BA = A^{-1}(AB)A$，这里 $A \in GL_n(F)$，故 $AB \sim_c BA$

(ii) 由 $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ 正定，故 $\exists P, Q \in GL_n(\mathbb{R})$，s.t $A = P^tP$，$B = Q^tQ$.

$AB = P^tPQ^tQ$ $\quad$ $AB \sim_s (P^t)^{-1} P^tPQ^tQ P^t$

$\quad = PQ^tQP^t = (QP^t)^t QP^t$

又由 $\det(QP^t) = \det(Q)\cdot\det(P^t) = \det(Q)\det(P) \neq 0$. 故 $QP^t \in GL_n(\mathbb{R})$.

$\Rightarrow$ AB 相似于一个正定矩阵.

2 解 $f(A) = A^2 - 2\varepsilon = 2A - \varepsilon - 2\varepsilon = 2A - 3\varepsilon$

$f(B) = B^2 - 2E = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 2E = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

由 B 不是数乘矩阵，故 μ_B 的次数至少是2次.

设 $\mu_B(t) = t^2 + \alpha_1 t + \alpha_0$，$\alpha_1, \alpha_0 \in F$.

由 $B^2 + \alpha_1 B + \alpha_0 E = 0$，

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_0 + \alpha_1 + 1 & \alpha_1 + 2 \\ 0 & \alpha_0 + \alpha_1 + 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_0 + \alpha_1 + 1 = 0 \\ \alpha_1 + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_0 = 1 \\ \alpha_1 = -2. \end{cases}$$

$\Rightarrow \mu_B = t^2 - 2t + 1$

3. 解: $J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，$A = \begin{pmatrix} J_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{4\times4}$. $B = \begin{pmatrix} J_2 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix}_{4\times4}$，$C = \begin{pmatrix} J_2 & 0 \\ 0 & \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{M} \end{pmatrix}$

$J_2^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，

由 J_2 不是数乘矩阵，故 μ_{J_2} 的次数要大于等于2，从而 $\mu_{J_2} = t^2$

$\mu_A = \mathrm{lcm}(\mu_{J_2}, \mu_0) = \mathrm{lcm}(t^2, t) = t^2$.

$\mu_B = \mathrm{lcm}(\mu_{J_2}, \mu_{\varepsilon}) = \mathrm{lcm}(t^2, t-1) = t^2(t-1)$.

$\mu_M = \mathrm{lcm}(t-2, t) = t(t-2)$.

从而 $\mu_C = \mathrm{lcm}(\mu_{J_2}, \mu_M) = (t^2, t(t-2)) = t^2(t-2)$.

4. Pf: 设 $f(t)=t^2-2t-3$，则 $f(A)=A^2-2A-3\varepsilon=0$

设 $p(t)=t+1$, $q(t)=t-3$. 则 $f=pq$.

由 $Char(F)\neq 2 \Rightarrow 1\neq -3 \Rightarrow \gcd(p,q)=1$.

由核分解定理可得. $V=\ker(A+\varepsilon)\oplus\ker(A-3\varepsilon)$.

故 $\dim(V)=\dim(\ker(A+\varepsilon))+\dim(\ker(A-3\varepsilon))$.

由核像维数公式可得.

$$\dim(V)=\dim(V)-\mathrm{rank}(A+\varepsilon)+\dim(V)-\mathrm{rank}(A-3\varepsilon)$$

$$\Rightarrow \mathrm{rank}(A+\varepsilon)+\mathrm{rank}(A-3\varepsilon)=\dim(V).$$

5. Pf: (i) 设 $i\in\mathbb{N}$. 如果 $\vec{x}\in\ker(A^i)$，则 $A^i(\vec{x})=\vec{0}$. 于是,

$$A^{i+1}(\vec{x})=A(A^i(x))=A(\vec{0})=\vec{0}$$

$\Rightarrow \ker(A^i)\subset\ker(A^{i+1})$. 故我们有

$$\ker(A^0)\subset\ker(A)\subset\ker(A^2)\subset\cdots,$$

若 $x\in im(A^{i+1})$，则 $\exists\ \vec{y}\in V$, s.t $\vec{x}=A^{i+1}(\vec{y})$, 于是, $\vec{x}=A^i(A(\vec{y}))\in im(A^i)$

$\Rightarrow im(A^{i+1})\subset im(A^i)$. 故

$$im(A^0)\supset im(A)\supset im(A^2)\supset\cdots.$$

(ii) 由 $\ker(A^0)\subset\ker(A)\subset\ker(A^2)\subset\cdots$，我们得到无穷增序列

$$\dim(\ker(A^0))\leq\dim(\ker(A))\leq\dim(\ker(A^2))\leq\cdots.$$

由于 $\dim(\ker(A^i))\leq\dim(V)$, $i=0,1,2,\cdots$, 故 $\exists\ k\in\mathbb{N}$, s.t 对 $\forall i\in\mathbb{Z}^+$,

$$\dim(\ker(A^k))=\dim(\ker(A^{k+i})) \quad ①$$

由 $\ker(A^{k+i})\subset\ker(A^k)$，故 $\ker(A^k)=\ker(A^{k+i})$

由核像维数公式结合①可知，对 $\forall i\in\mathbb{Z}^+$,

$$\dim(im(A^k))=\dim(im(A^{k+i}))$$

$\Rightarrow im(A^k)=im(A^{k+i})$.

(iii) 由 $im(A^k)=im(A^{2k})$ 可知，故 $\mathrm{rank}(A^k)=\mathrm{rank}(A^{2k})$. 由核像分解定理 I,

$\ker(A^k)\oplus im(A^k)=V$

商空间　　V是域F上的n维线性空间

设U是V的子空间，在V上定义如下等价关系：

设$\vec{x},\vec{y}\in V$，如果$\vec{x}-\vec{y}\in U$，则称$\vec{x}$和$\vec{y}$关于U等价，记为$\vec{x}\sim_U\vec{y}$

$[\vec{x}] = x+U$

$$V/U = \{\vec{v}+U \mid \vec{v}\in V\}.$$

V/U上的加法与数乘：

$\vec{x}+U,\vec{y}+U\in V/U$和$\alpha\in F$，定义：

设

$$(\vec{x}+U)+(\vec{y}+U) = (\vec{x}+\vec{y})+U,$$

$$\alpha(\vec{x}+U) = \alpha\vec{x}+U.$$

例1　$\phi: V\to W$ 满，则　$V/\ker(\phi)\cong W.$

例2　V_1, V_2是V的子空间，则 $V_2/V_1\cap V_2 \cong V_1+V_2/V_1.$

$$\begin{tikzcd}
V_2 \arrow[r, "\phi\ \text{嵌入}"] \arrow[d, "\pi_{\ker(\psi)}"'] \arrow[dr, "\psi=\pi\phi"] & V_1+V_2 \arrow[d, "\pi\ \text{自然映射}"] \\
V_2/\ker(\psi) \arrow[r, "\bar{\psi}"'] & V_1+V_2/V_1
\end{tikzcd}$$

$\ker\psi = V_1\cap V_2.$

性质　$\dim(V/U) = \dim(V)-\dim(U)$

U一组基　$\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_d$，

将其扩充成V的一组基$\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_d,\vec{e}_{d+1},\cdots\vec{e}_n$

$\Rightarrow$ $\vec{e}_{d+1}+U,\cdots,\vec{e}_n+U$是$V/U$的一组基.

命题　设$A\in L(V)$，U是A-子空间，则存在V的一组基使得A在该基下的矩阵是

$$A=\begin{pmatrix} B_{d\times d} & C_{d\times(n-d)} \\ 0 & D_{(n-d)\times(n-d)} \end{pmatrix},\quad d=\dim(U).$$

证：设$\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_d$是$U$的一组基，将其扩充成$V$的一组基$\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_d,\vec{e}_{d+1},\cdots,\vec{e}_n$.

$\forall j\in\{1,2,\cdots,d\}$，$\because U$是$A$-子空间，$\therefore A(\vec{e}_j)\in U$，$j=1,2,\cdots d$.

~~A~~ 即$\exists\ \beta_{1,j},\cdots,\beta_{d,j}\in F$，s.t. $A(\vec{e}_j)=\sum_{i=1}^{d}\beta_{ij}\vec{e}_i$

⇒ $\forall j\in\{d+1,\dots,n\}$，$\exists\ \alpha_{1j},\dots,\alpha_{nj}\in F$，使得

设， $A(\vec{e_j})=\sum_{i=1}^{n}\alpha_{ij}\vec{e_i}$

解： $\Rightarrow A=A(\vec{e_1},\dots,\vec{e_d},\vec{e_{d+1}},\dots,\vec{e_n})=(\vec{e_1},\dots,\vec{e_d},\dots,\vec{e_n})$

$$\begin{array}{cc} B & C \\ \left(\begin{array}{ccc|ccc} \beta_{11} & \cdots & \beta_{1d} & \alpha_{1,d+1} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & & \vdots & & \\ \beta_{d1} & \cdots & \beta_{dd} & \alpha_{d,d+1} & \cdots & \alpha_{dn} \\ \hline & & & \alpha_{d+1,d+1} & \cdots & \alpha_{d+1,n} \\ & O & & \vdots & & \\ & & & \alpha_{n,d+1} & \cdots & \alpha_{nn} \end{array}\right) & \\ & D \end{array}$$

若

注. B是$A|_U$在$\vec{e_1},\dots,\vec{e_d}$下的矩阵.

D是商算子.

$$\bar{A}: V/U\longrightarrow V/U$$

$$\vec{x}+U\longmapsto A(\vec{x})+U$$

在 V/U 的某组基（即 $\vec{e_{d+1}}+U,\dots,\vec{e_n}+U$）下的矩阵

验证线性性. $\forall\alpha,\beta\in F$，$\vec{x},\vec{y}\in V$，

$\bar{A}(\alpha(\vec{x}+U)+\beta(\vec{y}+U))$

$=\bar{A}(\alpha\vec{x}+\beta\vec{y}+U)$

$=A(\alpha\vec{x}+\beta\vec{y})+U$

$=\alpha A\vec{x}+\beta A\vec{y}+U$

$=\alpha(A\vec{x}+U)+\beta(A\vec{y}+U)$

$=\alpha\bar{A}(\vec{x}+U)+\beta(\bar{A}(\vec{y}+U))$

用良定义： 若 $\vec{x_1}+U=\vec{x_2}+U$，$\vec{x_1},\vec{x_2}\in V$， 则 $\vec{x_1}-\vec{x_2}\in U$

$\Rightarrow A(\vec{x_1}-\vec{x_2})\in U \quad\Rightarrow A\vec{x_1}+U=A\vec{x_2}+U$

$\forall j\in\{d+1,\dots,n\}$， $\bar{A}(\vec{e_j}+U)=A(\vec{e_j})+U$

$=(\sum_{i=1}^{n}\alpha_{ij}\vec{e_i})+U$

$=\sum_{i=d+1}^{n}\alpha_{ij}\vec{e_i}+U$

$=\sum_{i=d+1}^{n}\alpha_{ij}(\vec{e_i}+U)$

$\Rightarrow \bar{A}(\vec{e_{d+1}}+U,\dots,\vec{e_n}+U)=(\vec{e_{d+1}}+U,\dots,\vec{e_n}+U)D$

定理 设 $A\in\mathcal{L}(V)$，U是A-子空间，$\bar{A}$是A关于U的商算子，则 $\mu_{\bar{A}}\mid\mu_A$.

$\mu_{A|_U}\mid\mu_A$（今天不讲，第二章第2次讲义）

幂等算子的一些结果

设 $A\in\mathcal{L}(V)$，$A^2=A$.

由核像分解定理，可知， $V=\ker(A)\oplus\mathrm{im}(A)$.

设 $\vec{e_1},\dots,\vec{e_d}$是$\ker(A)$的一组基，$\vec{e_{d+1}},\dots,\vec{e_n}$是$\mathrm{im}A$的一组基.

$\forall j\in\{1,\dots,d\}$，$A(\vec{e_j})=0$

反之 $\forall j\in\{d+1,\dots,n\}$，$\exists\ \vec{u_j}\in V$，s.t $\vec{e_j}=A(\vec{u_j})$.

$A(\vec{e_j})=A^2(\vec{u_j})=A(\vec{u_j})=\vec{e_j}$

$\Rightarrow$ $\mathcal{A}$在$\vec{e_1},\cdots,\vec{e_d},\vec{e_{d+1}},\cdots,\vec{e_n}$下的矩阵是 $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E_{n-d} \end{pmatrix}$.

设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$, $\mathcal{A}^2=\mathcal{A}$, 求$\mathcal{A}$的极小多项式

解: 设 $p(t)=t^2-t$, 则 $\mu_{\mathcal{A}}\mid p(t)$.

若 $\mu_{\mathcal{A}}(t)=t-\alpha$, 则 $\mathcal{A}$是数乘算子且 $\mathcal{A}=\alpha\mathcal{E}$

由 $\mathcal{A}^2=\mathcal{A}$ $\Rightarrow$ $\alpha^2\mathcal{E}=\alpha\mathcal{E}$ $\Rightarrow$ $\alpha(\alpha-1)\mathcal{E}=0$

$\Rightarrow$ $\alpha=0$ 或 $\alpha=1$

$\Rightarrow$ $\mathcal{A}=0$ 或 $\mathcal{E}$.

故 $\mathcal{A}=0$, $\mu_{\mathcal{A}}=t$

$\mathcal{A}=\mathcal{E}$, $\mu_{\mathcal{A}}=t-1$.

$\mathcal{A}\neq0,\mathcal{E}$ 时, $\mu_{\mathcal{A}}=t^2-t$.

幂等矩阵. 设 $A\in M_n(F)$满足 $A^2=A$, 证明: $tr(A)=rank(A)$

Pf: 设 $\mathcal{A}: F^n\to F^n$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$\because A^2=A \Rightarrow \mathcal{A}^2=\mathcal{A}$

$A\sim_s \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E_r \end{pmatrix}$, 其中 $r=rank(A)=dim(im(\mathcal{A}))$.

$\Rightarrow tr(A)=tr(B)\overset{\overset{B}{\shortparallel}}{=}rank(A)$.

空间直和分解 $\Leftrightarrow$ 准对角矩阵表示

回顾: 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$, U_1,U_2是非平凡$\mathcal{A}$-子空间, 且 $V=U_1\oplus U_2$.

设 $\vec{e_1},\cdots,\vec{e_d}$是$U_1$的一组基, $\vec{e_{d+1}},\cdots,\vec{e_n}$是 U_2的一组基, 则 $\mathcal{A}$ 在$\vec{e_1},\cdots,\vec{e_d},\vec{e_{d+1}},\cdots,\vec{e_n}$下的矩阵是.

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$$

反之命题也对.

…设 $\mathcal{A}\in \mathcal{L}(V)$，在基底 $\vec{e_1},\cdots,\vec{e_n}$ 是

$$A=\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix},$$

其中 $B\in M_d(F)$，$C\in M_{n-d}(F)$，证明：$U=\langle \vec{e_1},\cdots,\vec{e_d}\rangle$，$W=\langle e_{d+1},\cdots,\vec{e_n}\rangle$ 是 $\mathcal{A}$-子空间且 $V=U\oplus W$.

解：设 $\vec{x}\in U$，则 $\exists x_1,\cdots,x_d\in F$，s.t $\vec{x}=x_1\vec{e_1}+\cdots+x_d\vec{e_d}$. 令 $\vec{x_d}=(x_1,\cdots,x_d)^t$

则 $\mathcal{A}(\vec{x})$ 在该基底下的坐标等于

$$A\begin{pmatrix} \vec{x_d} \\ \vec{0}_{n-d} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{x_d} \\ \vec{0}_{n-d} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B\vec{x_d} \\ C\vec{0}_{n-d} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B\vec{x_d} \\ \vec{0}_{n-d} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \mathcal{A}(\vec{x})\in U \quad \Rightarrow U$ 是 $\mathcal{A}$-子空间

同理可证 W 是 $\mathcal{A}$-不变子

由于 $\dim(U)=d$，$\dim(W)=n-d$ 且 $U+W=V$，

$\Rightarrow \dim(U+W)=\dim(U)+\dim(W)$

$\Rightarrow V=U\oplus W$

应用 设 $D: \mathbb{R}[x]^{(5)}\longmapsto \mathbb{R}[x]^{(5)}$ 是导数算子，则 $\mathbb{R}[x]^{(3)}$ 是 D-不变子.

$$\mathbb{R}[x]^{(5)}/\mathbb{R}[x]^{(3)}=\langle x^3+\mathbb{R}[x]^{(3)},\ x^4+\mathbb{R}[x]^{(3)}\rangle$$

D 在 $1,x,x^2,x^3,x^4$ 下的矩阵是 $\quad \mathcal{A}|_{\mathbb{R}[x]^{(3)}}$.

$$A=\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

$\bar{A}$