证明

4. / 1. 解

j (i) $\phi(e_1, e_2, e_3) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)\underset{A}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$

(ii) $\text{rank}(\phi) = \text{rank}(A) = 2$

令 $AX=0$，即 $\begin{cases} x_1+x_2-2x_3=0 \\ -x_1+x_2+x_3=0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ 其方程组的一组基础为 $\{(3,1,2)^t\}$

故 $\ker(\phi)$ 的一组基为 $\{3\vec{e_1}+\vec{e_2}+2\vec{e_3}\}$.

(iii)

$(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}) = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})\overset{P}{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}}$

$(\vec{w_1}, \vec{w_2}) = (\vec{\varepsilon_1}, \vec{\varepsilon_2})\underset{Q}{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}$

由于 P, Q 可逆，故 $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}$ 是 V 的一组基，$\vec{w_1}, \vec{w_2}$ 是 W 的一组基

ϕ 在 $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}$；$\vec{w_1}, \vec{w_2}$ 下的矩阵是

$$Q^{-1}AP = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & \frac{3}{2} & 1 \\ -1 & \frac{5}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

2. 解：(i) $\forall\, \alpha, \beta \in F$, $X, Y \in M_n(F)$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\alpha X+\beta Y) &= C^{-1}(\alpha X+\beta Y)C = C^{-1}\alpha XC + C^{-1}\beta YC \\ &= \alpha C^{-1}XC + \beta C^{-1}YC \\ &= \alpha\mathcal{A}(X) + \beta\mathcal{A}(Y) \end{aligned}$$

$\Rightarrow \mathcal{A}$ 是 $M_n(F)$ 上的线性变换.

(ii) $\mathcal{A}(XY) = C^{-1}(XY)C = (C^{-1}XC)(C^{-1}YC) = \mathcal{A}(X)\mathcal{A}(Y)$.

$\forall X \in M_n(F)$，$\exists\, CXC^{-1} \in M_n(F)$，s.t. $\mathcal{A}(CXC^{-1}) = X$ 故 $\mathcal{A}$ 为满射.

(iii) $\text{rank}(\mathcal{A}) = \dim(M_n(F)) = n^2$

3. 设 $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $T^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\overset{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}{T} = T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow c=b,\ d=0 \\ &\Leftrightarrow T = \begin{pmatrix} a & b \\ b & 0 \end{pmatrix},\ b \in \mathbb{R},\ b \neq 0 \end{aligned}$$

①

扫描全能王 创建

证明(i)

4. 令 $K_A=\ker(A)$，$K_{BA}=\ker(BA)$，$K_B=\ker(B)$，$I_A=\mathrm{im}(A)$.

再令 $n=\dim(V)$. 由核像维数公式可知，即证等式等价于

$$n-\dim(K_A)=n-\dim(K_{BA})+\dim(I_A\cap K_B)$$

$$\Leftrightarrow \quad \dim(I_A\cap K_B)=\dim(K_{BA})-\dim(K_A)$$

定义：

$$\phi: K_{BA}\to I_A\cap K_B$$
$$\vec{x}\mapsto A(\vec{x})$$

良定义：$A(\vec{x})\in I_A$，由 $\vec{x}\in K_{BA}\to B(A(\vec{x}))=\vec{0}$，于是

$\phi(\vec{x})=A(\vec{x})\in \mathrm{im}(A)\cap\ker(B)$

由于 $\phi=A|_{K_{BA}}$，A 是线性映射，故 ϕ 是线性映射.

单：由 $K_A\subset K_{BA}$，故 $\ker(\phi)=\ker(A)=K_A$

满：设 $\vec{v}\in I_A\cap K_B$，由于 $\vec{v}\in I_A$，故 $\exists\,\vec{u}\in V$，使得 $\vec{v}=A(\vec{u})$

由于 $\vec{v}\in K_B$，所以存在 $\vec{0}=B(\vec{v})=B(A(\vec{u}))$

$\Rightarrow$ $\vec{u}\in K_{BA}$ 且 $\phi(\vec{u})=A(\vec{u})=\vec{v}$.

由核像维数公式，可得

$$\dim(\ker(\phi))+\dim(\mathrm{im}(\phi))=\dim(K_{BA}).$$

$$\dim(K_A)+\dim(\mathrm{im}(A)\cap\ker(B))=\dim(K_{BA})$$

(ii) 将(i)中 A 用 A^{i-1} 代替，B 用 A 代替

故 $\mathrm{rank}(A^{i-1})=\mathrm{rank}(A^i)+\dim(\mathrm{im}(A^{i-1})\cap\ker(A))$

$$\Rightarrow \dim(\mathrm{im}(A^{i-1})\cap\ker(A))=\mathrm{rank}(A^{i-1})-\mathrm{rank}(A^i)$$
$$=n-\dim(\ker(A^{i-1}))-(n-\dim(\ker(A^i)))$$
$$=\dim(\ker(A^i))-\dim(\ker(A^{i-1}))$$

回顾 (核核分解)

设 $A\in\mathcal{L}(V)$，$p,q\in\mathbb{F}[t]$ 互素. 如果 $(pq)(A)=\mathcal{O}$，则

$$V=\ker(p(A))\oplus\ker(q(A)).$$

(核像分解) 设 $A\in\mathcal{L}(V)$，则

$$V=\ker(A)\oplus\mathrm{im}(A)\Leftrightarrow \mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}(A^2).$$

2

极小多项式

设 $A\in\mathcal{L}(V)$，$f(t)\in\mathbb{F}[t]$，若 $f(A)=\mathcal{O}$，则称 f 是 A 的零化多项式.

定义：设 $A\in\mathcal{L}(V)$，若 $g(t)\in\mathbb{F}[t]$ 且为 A 的零化多项式中次数最低首一的非零多项式，则称 g 为 A 的极小多项式，记作 μ_A.

注: ① 若 $f(A)=0$, 则 $\mu_A \mid f$. ② $\deg \mu_A \le n^2$ ③ $\deg(\mu_A)=\dim(F[A])$ 且 A 可逆 $\Leftrightarrow \mu_A(0)\neq 0$

不变子空间.

定义 $A\in L(V)$, U 是 V 的子空间, 如果 $A(U)\subset U$, 则称 U 是 A 的不变子空间.

性质 ① $A, B\in L(V)$, 满足 $AB=BA$, 则 $\ker(B)$ 和 $\mathrm{im}(B)$ 是 A 的不变子空间

② $A\in L(V)$, $f\in F[t]$, 则 $\ker(f(A))$ 和 $\mathrm{im}(f(A))$ 都是 A 的不变子空间. 下周再讲

~~③ U_1, U_2 是 A-子空间, 则 U_1+U_2 和 $U_1\cap U_2$ 都是 A-子空间.~~

定理 设 $A\in L(V)$, $U_1, U_2, \ldots$ 是非平凡 A-子空间满足 $V=U_1\oplus U_2 \ldots$. 设 Z_i 是 U_i 的一组基, $i=1,\cdots,k$. 则 A 在 V 的基底 $Z_1\cup\cdots\cup Z_k$ 下的矩阵

$$A=\begin{pmatrix}A_1 & \\ & A_2\end{pmatrix}.$$

其中 A_i 是 A_{U_i} 在 Z_i 下的矩阵, $i=1,2,\ldots$. 进而,

$$\mu_A=\mathrm{lcm}(\mu_{A_{U_1}}, \mu_{A_{U_2}}, \ldots).$$

(核像分解II) 设 $A\in L(V)$. 则

$$V=\ker(A)\oplus \mathrm{im}(A) \Longleftrightarrow t^2\nmid \mu_A$$

证: 设 $K=\ker(A)$ 和 $I=\mathrm{im}(A)$.

($\Rightarrow$) 设 $V=K\oplus I$. 如果 $K=\{0\}$, 则 A 是单射, 也是满射, 即双射. 故 A 可逆, 从而 $\mu_A(0)\neq 0$, 从而 $t\nmid \mu_A$.

若 $K_A=V$, 则 $A=O$, 此时 $\mu_A=t$, 故 $t^2\nmid\mu_A$.

设 K 和 I 都是非平凡的, 则 A_K 是零算子, 于是 $\mu_{A_K}=t$. (自动成立)

下证 A_I 是双射.

设 $\vec{v}\in I$, 若 $A_I(\vec{v})=\vec{0}$, 则 $A(\vec{v})=\vec{0}$, 从而 $\vec{v}\in K\cap I$, 故 $\vec{v}=\vec{0}$, 即 A_I 是双射

$\Rightarrow t\nmid \mu_{A_I}$.

$$\mu_A=\mathrm{lcm}(\mu_{A_K}, \mu_{A_I})=t\mu_{A_I}$$

$\Rightarrow t^2\nmid \mu_A$

($\Leftarrow$) 若 $t\nmid\mu_A$, 则 A 可逆, 故 $\ker(A)=\{0\}$, $\mathrm{im}(A)=V$, 从而 $V=\ker(A)\oplus\mathrm{im}(A)$.

若 $\mu_A=t$, 则 $A=O$, 故 $\ker(A)=V$, $\mathrm{im}(A)=\{0\}$, 故 $V=\ker(A)\oplus\mathrm{im}(A)$

设 $\mu_A = tp$ 且 $\gcd(t,p)=1$. 由核核分解定理

$$V = K \oplus \ker(p(A)).$$

下面我们验证 $I = \ker(p(A))$. 设 $\vec{x} \in I$, 则 $\exists \vec{y} \in V$, s.t $\vec{x} = A(\vec{y})$

$p(A)(\vec{x}) = p(A)(A(\vec{y})) = (p(A)A)(\vec{y}) = (tp)(A)(\vec{y}) = \mu_A(A)(\vec{y}) = \vec{0}$

$\Rightarrow I \subset \ker(p(A))$.

$\dim(\ker(p(A))) = \dim(V) - \dim(K) = \dim(I)$

$\Rightarrow I = \ker(p(A))$.

例. 设 $A \in L(V)$ 满足 $A^3 - A^2 - A = 0$. 证明: $\ker(A) \oplus \operatorname{im}(A) = V$.

Pf: 令 $f(t) = t^3 - t^2 - t$, 则 $f(A) = 0$

$\Rightarrow \mu_A \mid f$.

$t^2 \nmid f \Rightarrow t^2 \nmid \mu_A \Rightarrow \ker(A) \oplus \operatorname{im}(A) = V$

期中答卷讲解

1.(i)证明 H是$M_2(\mathbb{C})$的子群+乘法封闭即可（+幺元）

$\forall W, Z \in H$ 验证 $W-Z \in H$

(iii). $\det\begin{pmatrix} u & v \\ -\bar{v} & \bar{u} \end{pmatrix} = u\bar{u}+\bar{v}v = |u|^2+|v|^2$.

($\cancel{u^2+v^2}$) → 写法有误.

$\begin{pmatrix} u & v \\ -\bar{v} & \bar{u} \end{pmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{u\bar{u}+v\bar{v}} \begin{pmatrix} \bar{u} & -v \\ \bar{v} & u \end{pmatrix}$. $\boxed{\in H}$

2. (i). $\mathcal{A}(1,x,x^2,x^3) = (1,x,x^2,x^3)\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A}$, $\mathcal{B}(1,x,x^2,x^3) = (1,x,x^2,x^3)\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(ii). $\mathrm{rank}(A)=3 \Rightarrow \boxed{\dim(\mathrm{im}\,\mathcal{A})} = 3$.

(iii) 核像定理可利用. $V = \ker(\mathcal{A}) \oplus \mathrm{im}(\mathcal{A}) \Leftrightarrow \mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(A^2)$

$\forall f = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \in \mathbb{R}[x]^{(4)}$

$\mathcal{B}(f) = x(a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2) - 2(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3)$.

$= a_1x + \cancel{2a_2x^2} + 3a_3x^3 - 2a_0 - 2a_1x - \cancel{2a_2x^2} - 2a_3x^3$.

$= a_3x^3 - a_1x - 2a_0 = 0$.

$\Rightarrow a_3 = a_1 = a_0 = 0$.

$\Rightarrow \ker(\mathcal{B}) = \langle x^2 \rangle$.

结合 $\mathrm{Im}(\mathcal{B}) = \langle 1, x, x^3 \rangle$; 故 $\ker(\mathcal{B}) \cap \mathrm{im}(\mathcal{B}) = \{0\}$.

$\Rightarrow \ker(\mathcal{B}) + \mathrm{im}(\mathcal{B})$ 是直和.

3. (iii) 注意. $A \sim_c E$ (在复数域 $\mathbb{C}$)

$\Rightarrow \exists P \in GL_n(\mathbb{C})$, s.t $P^tAP = E \Rightarrow A = (P^t)^{-1}P^{-1} = (P^{-1})^tP^{-1}$.

(注:复数域上不谈正不正定的问题).

4. A负定 $\Leftrightarrow \Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 < 0$.

5. 令 $f_5 = x^5 - 9$. $f_5(x-1) = (x-1)^5 - 9 = x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 5x - 10$.

素数 $5 \nmid 1$, $5 | -5$, $5 | 10$, $5 | -10$, $5 | 5$, $5 | -10$, $5^2 \nmid -10$.

$\Rightarrow f_5(x-1)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约.

6. Pf: $M = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ $V_M = \{x \in F^n \mid \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} x = 0\}$.

$V_M = V_A \cap V_B$.

$n - \dim(V_M) = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$, $\operatorname{rank}(A) = n - \dim V_A$, $\operatorname{rank}(B) = n - \dim V_B$

$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B)$ $\Leftrightarrow$

$n - \dim(V_M) = n - \dim(V_A) + n - \dim(V_B)$

$\Leftrightarrow$ $\dim(V_A) + \dim(V_B) = n + \dim(V_M)$

$\Leftrightarrow$ $\dim(V_A + V_B) + \dim(V_A \cap V_B) = n + \dim(V_A \cap V_B)$.

$\Leftrightarrow$ $\dim(V_A + V_B) = n$.

7. (ii) $A^* = \det(A) A^{-1}$, $\boxed{\text{注意 } \det(A) > 0}$, 由 A 正定 $\Rightarrow \exists P \in GL_n(\mathbb{R})$, s.t. $A = P^t P$.

$A^\vee = (\sqrt{\det(A)} P^{-1})(\sqrt{\det(A)} P^{-1})^t$

$\Rightarrow A^\vee$ 正定.

扫描全能王 创建

in H-exponent ... field of ...

中 8. (i) $f(\vec{x},\vec{y})$ 是 q 的配极，则 $f|_{U\times U}$ 是 q_U 的配极，故 q_U 是 U 上的双线性型.

(ii). 由惯性定理，$\exists$ V 的一组基 $\vec{e_1},\cdots,\vec{e_n}$, s.t 对 $\forall \vec{x}=x_1\vec{e_1}+\cdots+x_n\vec{e_n}$,

法一

$$q(\vec{x})=x_1^2+\cdots+x_k^2-x_{k+1}^2-\cdots-x_{k+l}^2$$

同理，$\exists$ U 的一组基 $\vec{\varepsilon_1},\cdots,\vec{\varepsilon_d}$, s.t 对 $\forall \vec{y}=y_1\vec{\varepsilon_1}+\cdots+y_d\vec{\varepsilon_d}$

$$q_U(\vec{y})=y_1^2+\cdots+y_s^2-y_{s+1}^2-\cdots-y_{s+t}^2$$

假设 $s>k$，令

$$H=\langle\vec{\varepsilon_1},\cdots,\vec{\varepsilon_s}\rangle,\quad W=\langle\vec{e_{k+1}},\cdots,\vec{e_n}\rangle$$

$\dim(H)=s$, $\dim(W)=n-k>n-s$,

$$\dim(H\cap W)=\dim(H)+\dim(W)-\dim(H+W)$$
$$>n-s+s-n=0$$

$\Rightarrow \exists \vec{z}\neq\{0\}$, $\vec{z}\in H\cap W$,

由于 $\vec{z}\in H$, $q_U(\vec{z})>0$.

由于 $\vec{z}\in W$, $q(\vec{z})\leq 0$.

$\rightarrow\leftarrow$

考虑 $-q$, $-q_U$, 可推得 $t\leq l$

法二: 根据惯性定理，$\exists$ U 的一组基 $\vec{e_1},\cdots,\vec{e_d}$ 使得 q_U 在其底下的矩阵是

$$A=\begin{pmatrix}E_s&0&0\\0&-E_t&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

把 $\vec{e_1},\cdots,\vec{e_k}$ 扩充为 V 的一组基 $\vec{e_1},\cdots,\vec{e_d},\vec{e_{d+1}},\cdots,\vec{e_n}$, 则 q 在这组基下的矩阵形如

$$B=\begin{pmatrix}A&M\\M^t&N\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_1&0&M_1\\0&0&M_2\\M_1^t&M_2^t&N\end{pmatrix}$$

其中 $A_1=\begin{pmatrix}E_s&0\\0&-E_t\end{pmatrix}$, $M=\begin{pmatrix}M_1\\M_2\end{pmatrix}$.

行列相伴 $B\sim_c\begin{pmatrix}A_1&0&0\\0&0&M_3\\0&M_2^t&N\end{pmatrix}$

由于 $\begin{pmatrix} D & M_2 \\ M_2^t & N \end{pmatrix}$ 对称，故 $\exists\ P \in GL_{n-s-t}(\mathbb{R})$, s.t. $D := P^t \begin{pmatrix} 0 & M_2 \\ M_2^t & N \end{pmatrix} P$

是对角线的，

令 $Q = \begin{pmatrix} E_{s+t} & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix} \in GL_n(\mathbb{R})$

$$Q^t C Q = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}.$$

$$\Rightarrow \quad B \sim_c \begin{pmatrix} A_1 & \\ & D \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad k \geq s.$$
$$l \geq t$$