1. Pf：由 $det(A)<0$，可知 A 不是半正定，故 A 是负定的或者半负定或者不定。
假设对 $\forall x\in R^n$，$x^tAx\geq 0$，则 A 是半正定的，故此假设不成立，
从而 $\exists x\in \mathbb{R}^n$，使得 $\vec{x}^tA\vec{x}<0$

2. 解：$\forall_{x=} (x_1,x_2,x_3)^t\in R^3$，$q(\vec{x})\geq 0$.

故 q 是半正定的，

令 $q(\vec{x})=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+x_2=0 \\ x_1-x_3=0 \\ 2x_1+x_2-x_3=0 \\ 3x_1+x_2-2x_3=0 \end{cases} \Leftrightarrow A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$，其中 $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&-1\\2&1&-1\\3&1&-2\end{pmatrix}$

$A\xrightarrow[\text{变换}]{\text{初等}}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&-1&-1\\0&-1&-1\\0&-2&-2\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ $\Rightarrow rank(A)=2$.

$\Rightarrow Ax=0$ 的解空间维数为 1.
从而 C_q 的维数为 1.

从而 q 的签名为 $(2,0)$.

（原理借用第七周讲义 例 9.14. "$\Leftarrow$"）

3. Pf：由于 $B\in SM_{n-1}(R)$ 正定，故 $\exists P\in GL_n(\mathbb{R})$，s.t

$$P^tBP=E_{n-1}.$$

令 $Q=\begin{pmatrix}E_{n-1}&-B^{-1}\vec{v}\\0&1\end{pmatrix}$，则 $Q^t\begin{pmatrix}B&v\\v^t&a\end{pmatrix}Q=\begin{pmatrix}B&0\\0&a-v^tB^{-1}v\end{pmatrix}$

再令 $C=\begin{pmatrix}P&\\&1\end{pmatrix}$，$C^tQ^t\begin{pmatrix}B&v\\v^t&a\end{pmatrix}QC=\begin{pmatrix}E_{n-1}&0\\0&a-v^tB^{-1}v\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow A\sim_c \underbrace{\begin{pmatrix}E_{n-1}&0\\0&a-v^tB^{-1}v\end{pmatrix}}_{M}$$

$rank(A)=rank(M)$.

$\Rightarrow |M|=a-v^tB^{-1}v=|A|=0$.

$\Rightarrow$ A 的签名为 $(n-1,0)$

唯一因子分解整环 (UFD)

解：设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，A_k 是 A 的前 k 行前 k 列组成的矩阵，$k=1,2,\cdots n$.

则 $E+\varepsilon A$ 的 k 阶顺序主子式为

$$\Delta_k(\varepsilon)=|E_k+\varepsilon A_k|=\begin{vmatrix} 1+\varepsilon a_{11} & \varepsilon a_{12} & \cdots & \varepsilon a_{1k} \\ \varepsilon a_{21} & 1+\varepsilon a_{22} & \cdots & \varepsilon a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varepsilon a_{k1} & \varepsilon a_{k2} & \cdots & 1+\varepsilon a_{kk} \end{vmatrix} = C_{k,k}\varepsilon^k + C_{k,k-1}\varepsilon^{k-1} + \cdots + C_{k,1}\varepsilon + 1$$

$\Delta_k(\varepsilon)$ 是关于 ε 的多项式，满足 $\Delta_k(0)=1$.

由 $\Delta_k(\varepsilon)$ 连续性可知，$\exists\ \delta_k>0$，s.t. $\forall\ \varepsilon\in(-\delta_k,\delta_k)$，$\Delta_k(\varepsilon)>0$

令 $\delta=\min\{\delta_1,\cdots,\delta_n\}$，则当 $\varepsilon\in(-\delta,\delta)$ 时，$\Delta_k(\varepsilon)>0$，$k=1,2,\cdots,n$

$\Rightarrow$ 当 $\varepsilon\in(-\delta,\delta)$ 时，$E+\varepsilon A$ 正定.

唯一因子分解整环 (UFD)

对D中每个非零非单位的元素a都满足下列两个条件

(i) a表示中D中有限多个不可约元素之积

(ii) 相伴意义下不可约分解唯一

eg $\mathbb{Z}$ $\forall n\in\mathbb{Z}$, $n=\pm p_1^{i_1}p_2^{i_2}\cdots p_n^{i_n}$, p_i为不同素数, $i_k\in\mathbb{Z}^+$, $n\in\mathbb{Z}\setminus\{0,\pm1\}$.

$F[x]$ $f=u\,p_1^{i_1}p_2^{i_2}\cdots p_n^{i_n}$, p_i为互素不可约多项式, $i_k\in\mathbb{Z}^+$, $u\in F^*$, $f\in F[x]\setminus F$

性质 素元 $\overset{UFD}{\Leftrightarrow}$ 不可约元. (整环中, 素元 ⇒ 不可约元)

四元数环

$$H=\left\{\begin{pmatrix}u & v\\ -\bar{v} & \bar{u}\end{pmatrix}\middle|\, u,v\in\mathbb{C}\right\}$$

性质 $(H,+,0,\cdot,E)$ 是 $M_2(\mathbb{C})$ 中的非交换子环, 且H中的每个非零元在H中有可逆元 (证明见李老师第二周讲义 4.5)

抽象线性空间

定义 $(V,+,\vec{0})$ 交换群, F域, 数乘: $F\times V\to V$ 满足
$(\alpha,\vec{v})\mapsto\alpha\vec{v}$

① $\forall\alpha,\beta\in F$, $\vec{v}\in V$, $(\alpha\beta)\vec{v}=\alpha(\beta\vec{v})$ 结合律

② $\forall\vec{v}\in V$, $1\cdot\vec{v}=\vec{v}$

③ $\forall\alpha,\beta\in F$, $\vec{v}\in V$, $(\alpha+\beta)\vec{v}=\alpha\vec{v}+\beta\vec{v}$ } 分配律

④ $\forall\alpha\in F$, $\vec{u},\vec{v}\in V$, $\alpha(\vec{u}+\vec{v})=\alpha\vec{u}+\alpha\vec{v}$ }

则称 V是域F上的线性空间

例 坐标空间, 矩阵空间, $\underline{\text{代数空间}}_{F[x]}$, 映射空间

子空间 $W\subseteq V$, 非空, W是V的子空间 ⟺ $\forall\alpha,\beta\in F$, $\vec{x},\vec{y}\in W$, $\alpha\vec{x}+\beta\vec{y}\in$

例: $\phi: V_1\to V_2$ 线性映射, $\ker(\phi)$ 是 V_1 的子空间, $\mathrm{Im}(\phi)$ 是 V_2 的子空间.

$SM_n(F)$, $SSM_n(F)$ 是 $M_n(F)$ 的子空间.

性质 ① V_1, V_2 是V的子空间, $V_1\cap V_2$, V_1+V_2 是V的子空间

$V_1\cup V_2$ 是V的子空间 ⟺ $V_1\subseteq V_2$ 或 $V_2\subseteq V_1$

② 维数公式 $\dim(V_1+V_2)=\dim(V_1)+\dim(V_2)-\dim(V_1\cap V_2)$

3

多项式因式分解. ①(Eisenstein判别法) 设D是唯一因子分解整环, F是D的分式域

$$f = f_n x^n + f_{n-1} x^{n-1} + \cdots + f_0$$

其中 $n>0$, $f_n, f_{n-1}, \cdots, f_0 \in D$ 且 $f_n \neq 0$. 设 p 是 D 中不可约元,

$$p \nmid f_n,\ p \mid f_{n-1},\ \cdots,\ p \mid f_0,\ p^2 \nmid f_0.$$

则 f 在 $F[x]$ 中不可约.

注: $f(x)$ 可约性 $\Leftrightarrow$ $f(ax+b)$ 可约性. $a \neq 0$.

②(整根测试) 若 R UFD, $f \in R[x] \subset F[x]$, $F = \mathrm{Frac}(R)$.

$x = \frac{p}{q}$ 为 f 的根, $\gcd(p, q) = 1$, $p, q \in R$.

若 $f = a_n x^n + \cdots + a_0$, 则 $q \mid a_n$, $p \mid a_0$

③(约化判别法) $f \in \mathbb{Z}[x]$, 若 $\deg f = \deg \bar{f}$, 则 f 在 $\mathbb{Q}[x]$ 中可约 $\Rightarrow \phi(f)$ 在 $\mathbb{Z}_p[x]$ 中可约.

$$\phi: \mathbb{Z}[x] \to \mathbb{Z}_p[x]$$

$$a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \mapsto \bar{a}_0 + \bar{a}_1 x + \cdots + \bar{a}_n x^n.$$

子空间直和

V是线性空间，$V_1,\cdots,V_k$是V的子空间，$\underline{V=V_1+V_2+\cdots+V_k}$，$V=V_1\oplus\cdots\oplus V_k \Leftrightarrow \vec{0}$分解唯一

$\Leftrightarrow V_i\cap(V_1+\cdots+V_{i-1}+V_{i+1}+\cdots+V_k)=\{0\}$.

$\Leftrightarrow \dim V=\dim V_1+\cdots+\dim V_k$.

例 ① $\vec{v_1},\cdots,\vec{v_n}$是$\mathbb{R}^n$一组基，则$\mathbb{R}^n=\langle\vec{v_1}\rangle\oplus\cdots\oplus\langle\vec{v_n}\rangle$

② $\mathrm{char}(F)\neq 2$，$SM_n(F)\oplus SSM_n(F)=M_n(F)$

③ V线性空间，$V_1,\cdots,V_k$子空间，如果$V_1+\cdots+V_k$是直和，则对$\forall l\in\{1,\cdots,k\}$，$V_1+\cdots+V_l$也是直和.

④ V线性空间，V_1,V_2,V_3,V_4子空间，如果$V=V_1\oplus V_2$且$V_1=V_3\oplus V_4$，则

$V=V_3\oplus V_4\oplus V_2$

线性映射.

定义 $\phi: V\to W$，满足$\forall\alpha,\beta\in F$，$\vec{u},\vec{v}\in V$，$\phi(\alpha\vec{u}+\beta\vec{v})=\alpha\phi(\vec{u})+\beta\phi(\vec{v})$.

性质 ϕ单 $\Leftrightarrow \ker(\phi)=\{\vec{0}\}$ $\qquad \boxed{\dim V=\dim\operatorname{im}\phi+\dim\ker\phi}$

ϕ满 $\Leftrightarrow \operatorname{im}\varphi=W$

线性同构 = 线性映射 + 双射.

线性空间. $\mathrm{Hom}(F^n,F^m)\cong F^{m\times n}$.

$\phi\longmapsto A_\phi$ （φ在标准基下的矩阵）

基变换与坐标变换

设$\{\vec{e_1},\cdots,\vec{e_n}\}$与$\{\vec{e_1}',\cdots,\vec{e_n}'\}$为$V$的两组基，

基变换 $\exists P\in GL_n(F)$（转换矩阵），s.t. $(\vec{e_1}',\cdots,\vec{e_n}')=(\vec{e_1},\cdots,\vec{e_n})P$（过渡矩阵）

坐标变换. $\forall\vec{v}\in V$，$\vec{v}=\alpha_1\vec{e_1}+\cdots+\alpha_n\vec{e_n}=\alpha_1'\vec{e_1}'+\cdots+\alpha_n'\vec{e_n}'$.

即：$\vec{v}=(\vec{e_1}',\cdots,\vec{e_n}')\begin{pmatrix}\alpha_1'\\ \vdots\\ \alpha_n'\end{pmatrix}=(\vec{e_1},\cdots,\vec{e_n})P\begin{pmatrix}\alpha_1'\\ \vdots\\ \alpha_n'\end{pmatrix}$

$=(\vec{e_1},\cdots,\vec{e_n})\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$ $\quad\Rightarrow P\begin{pmatrix}\alpha_1'\\ \vdots\\ \alpha_n'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix}\alpha_1'\\ \vdots\\ \alpha_n'\end{pmatrix}=P^{-1}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$

基扩充定理：V有限维线性空间，如果 $S\subset V$是线性无关集，则$\exists V$的基底T, s.t $S\subset T$.

V, W是域F上的有限维线性空间，$V\cong W \Leftrightarrow \dim(V)=\dim(W)$

当$\dim_F(V)=n$, $V\cong F^n$.

例 证明

(利用线性映射基本定理II) 设V的一组基是$\vec{v_1},\cdots,\vec{v_n}$，$W$是$F$上的线性空间且$\vec{w_1},\cdots,\vec{w_n}\in W$，则存在唯一的线性映射$\phi: V\to W$使得

$\phi(\vec{v_1})=\vec{w_1},\cdots,\phi(\vec{v_n})=\vec{w_n}$.

线性映射的矩阵表示

$\phi\in Hom(V,W)$，$\exists! A\in F^{m\times n}$, s.t $\forall \vec{x}=x_1\vec{e_1}+\cdots+x_n\vec{e_n}$，$\phi(\vec{x})$在$\vec{\varepsilon_1},\cdots,\vec{\varepsilon_m}$下的

$\dim(V)=n, \dim(W)=m$

坐标是 $\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_m\end{pmatrix}=\underline{A}\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$

$\{\vec{e_1},\cdots,\vec{e_n}\}$为$V$的一组基.

$\{\vec{\varepsilon_1},\cdots,\vec{\varepsilon_m}\}$为$W$的一组基，

A是ϕ在基底$\vec{e_1},\cdots,\vec{e_n}$和$\vec{\varepsilon_1},\cdots,\vec{\varepsilon_m}$下的矩阵表示.

例 $\phi: R[x]^{(n)}\to R[x]^{(n)}$ $\frac{d}{dx}$，ϕ在$1,x,\cdots,x^{n-1}$下的矩阵.

解：
$$(\phi(1),\phi(x),\phi(x^2),\cdots,\phi(x^{n-1}))=(1,x,x^2,\cdots,x^{n-1})\begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&0&0\\0&0&2&\cdots&0&0\\\vdots&&&\ddots&&\vdots\\\vdots&&&&&n-1\\0&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&0\end{pmatrix}$$

对偶思想

任何一个n维线性空间线性同构于F^n，从而V的子空间可看做F^n中的子空间，进一步V线性同构于齐次方程组的解空间.

双线性型

定义：V是域F上的n维线性空间，$f: V\times V\to F$
$(\vec{x},\vec{y})\mapsto f(\vec{x},\vec{y})$

$\forall \alpha,\beta\in F, \vec{z}\in V$, $f(\alpha\vec{x}+\beta\vec{z},\vec{y})=\alpha f(\vec{x},\vec{y})+\beta f(\vec{z},\vec{y})$
$f(\vec{x},\alpha\vec{y}+\beta\vec{z})=\alpha f(\vec{x},\vec{y})+\beta f(\vec{x},\vec{z})$

定理. V一组基$\vec{e_1},\cdots,\vec{e_n}$，$f$是$V$上的双线性型，$\exists! A\in M_n(F)$, s.t
$\forall \vec{x}=(\vec{e_1},\cdots,\vec{e_n})\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$，$\vec{y}=(\vec{e_1},\cdots,\vec{e_n})\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$，有$f(\vec{x},\vec{y})=(x_1,\cdots,x_n)\underline{A}\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$

$(f(e_i,e_j))_{n\times n}$.

注：f 是 V 双线性型，f 在 V 上两组基 $\vec{e_1},\cdots,\vec{e_n}$ 和 $\vec{\varepsilon_1},\cdots,\vec{\varepsilon_n}$ 下矩阵表示分别是 A、B 且

$(\vec{\varepsilon_1},\cdots,\vec{\varepsilon_n})=(\vec{e_1},\cdots,\vec{e_n})P$，$P\in GL_n(F)$

则 $B=P^tAP$，

注：双线性型在不同基底下的矩阵是合同的，而彼此合同的矩阵的秩相同．

定义 $\operatorname{rank}(f):=\operatorname{rank}(A)$

对称双线性型

定义 $\forall \vec{x},\vec{y}\in V$，$f(\vec{x},\vec{y})=f(\vec{y},\vec{x})$，称 f 是对称的．

定理：$\operatorname{char}(F)\neq 2$，$f\in L_2^+(V)$，则 V 中有一组基，使得 f 在该基下矩阵是对角阵

矩阵语言：$A\in SM_n(F)$，A 合同于一个对角阵）

定理．（Jacobbi公式） 如果 A 的各阶顺序主子式 Δ_i 均非零，则 ($\Delta_0=1$)

$$A\sim_c \operatorname{diag}\left(\frac{\Delta_1}{\Delta_0},\frac{\Delta_2}{\Delta_1},\cdots,\frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}\right)$$

对称矩阵化对角方法：$A\in SM_n(F)$

1.降维法 P 满足 $P^tAP=B=\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{pmatrix}$

2．行列相伴变换．$(A|E)\longrightarrow(B|P)$，

要点：$\begin{cases}①\text{先看 }A\text{ 的对角线上的元素，}\begin{cases}\text{全为 }0\text{，则通过同时加行加列使 }a_{11}\neq 0\\ \text{不全为 }0\text{，则同时通过交换行列位置使 }a_{11}\neq 0.\end{cases}\\ ②\text{ 把第一行第一列除交叉位置 }a_{11}\text{ 以外的元素全化为 }0\text{，然后以此类推．}\end{cases}$

注：只记录下列变换．（对于矩阵 P）

3 配方法 $f(x_1,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}x_i^2+\sum_{1\le i<j\le n}a_{ij}x_ix_j$

① 若 $\exists a_{ii}\neq 0$，设 $a_{11}\neq 0$，令 $\begin{cases}y_1=x_1+\sum_{j=2}^{n}\frac{a_{1j}}{a_{11}}x_j\\ y_2=x_2\\ \vdots\\ y_n=x_n\end{cases}$

② 若 $\forall a_{ii}=0$，$\exists a_{ij}\neq 0$，不妨设 $a_{12}\neq 0$ 令 $\begin{cases}x_1=y_1+y_2\\ x_2=y_1-y_2\\ x_i=y_i,\ i=3,\cdots,n.\end{cases}$，再做①的步骤

注：P 的所有列向量为 φ 的规范基，在该基下，f 规范型为 $\lambda_1x_1^2+\cdots+\lambda_nx_n^2$．

二次型

V是F上有限维线性空间

定义 $q: V \to F$. ① $\forall \vec{v} \in V$, $q(\vec{v}) = q(-\vec{v})$

② $\forall \vec{x},\vec{y} \in V$, $f(\vec{x},\vec{y}) = \frac{1}{2}(q(\vec{x}+\vec{y}) - q(\vec{x}) - q(\vec{y}))$是$V$上对称双线性型, f称为q的配极.

2. $Q(V)$, $L_2^+(V)$, $SM_n(F)$是线性同构

$$Q(V) \longleftrightarrow L_2^+(V) \longleftrightarrow SM_n(F)$$

$$q \longmapsto f(\vec{x},\vec{y}) = \frac{1}{2}(q(\vec{x}+\vec{y}) - q(\vec{x}) - q(\vec{y})) \longrightarrow A(f(\vec{e_i},\vec{e_j}))_{n\times n}$$

$$q(\vec{x}) = f(\vec{x},\vec{x}) \longleftarrow f(\vec{x},\vec{y}) = \vec{x}^t A \vec{y} \longleftarrow A = (a_{ij})_{n\times n}$$

V是$\mathbb{C}$上n维线性空间

$A \in SM_n(\mathbb{C})$, $rank(A) = r$, 则 $A \sim_c \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$A \in SM_n(\mathbb{R})$, $A \sim_c \begin{pmatrix} E_k & 0 & 0 \\ 0 & -E_l & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 签名$(k,l)$

定义 半正定: $\forall \vec{x} \in V$, $q(\vec{x}) \geq 0 \Leftrightarrow l = 0$ $\quad \vec{x}^t A \vec{x}$, $A \in SM_n(\mathbb{R})$

正定: $\forall \vec{x} \in V\setminus\{0\}$, $q(\vec{x}) > 0 \Leftrightarrow k = n$

半负定: $\forall \vec{x} \in V$, $q(\vec{x}) \leq 0 \Leftrightarrow k = 0$

负定: $\forall \vec{x} \in V\setminus\{0\}$, $q(\vec{x}) < 0 \Leftrightarrow l = n$

不定: 不是半正定,不是半负定 $\Leftrightarrow k > 0, l > 0$

小结 $A \in SM_n(\mathbb{R})$.

q半正定 $\Leftrightarrow$ A半正定 $\Leftrightarrow l = 0 \Leftrightarrow \exists B \in M_n(\mathbb{R})$, s.t. $A = B^t B \Leftrightarrow \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{x}^t A \vec{x} \geq 0$.

q正定 $\Leftrightarrow$ A正定 $\Leftrightarrow k = n \Leftrightarrow \exists P \in GL_n(\mathbb{R})$, s.t. $A = P^t P \Leftrightarrow \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n\setminus\{0\}$, $\vec{x}^t A \vec{x} >$

$\Leftrightarrow$ A的所有顺序主子式>0 $\Leftrightarrow$ A的所有主子式>0.

q负定 $\Leftrightarrow \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n\setminus\{0\}$, $\vec{x}^t A \vec{x} < 0 \Leftrightarrow (-1)^i \Delta_i > 0$, $i = 1, 2, \cdots, n$.

注: A正定 $\Rightarrow \det(A) > 0$, A^{-1}正定, $\det(A)$不大于A的对角线元素之积.

线性变换例子.

V的一组基是 v_1, v_2, V上的线性变换 $\mathcal{A}$ 由 $\mathcal{A}(\vec{v_1})=\vec{v_1}-\vec{v_2}$, $\mathcal{A}(\vec{v_2})=2\vec{v_1}+\vec{v_2}$ 给出

① 计算 $\mathrm{rank}(\mathcal{A})$.

② 验证 $\vec{w_1}=\vec{v_1}+\vec{v_2}$, $\vec{w_2}=\vec{v_1}-\vec{v_2}$ 是V的一组基, 并求 $\mathcal{A}$ 在 $\vec{w_1}, \vec{w_2}$ 下的矩阵.

解 ① $\mathcal{A}(\vec{v_1},\vec{v_2})=(\vec{v_1},\vec{v_2})\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}_{A}$.

$\mathrm{rank}(A)=2 \Rightarrow \mathrm{rank}(\mathcal{A})=2$.

② $(\vec{w_1},\vec{w_2})=(\vec{v_1},\vec{v_2})\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}_{B}$.

由于 B 可逆, 故 $(\vec{w_1},\vec{w_2})$ 是V的一组基.

$\mathcal{A}$ 在 $\vec{w_1},\vec{w_2}$ 下的矩阵为 $B^{-1}AB=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

$$=\begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$